A 544092

Digitized by Google

1817
ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

QA
33
.T119a
1683

S.1.4

ARITHMETICÆ THEORIA ET PRAXIS.

AUCTORE
ANDREA TACQUET
E SOCIETATE JESU,
MATHESEOS PROFESSORE.

Editio ultima correctior.



BRUXELLIS,
Apud FRANCISCVM FOPPENS.
M. DC. LXXXIII.

ILLUSTRISSIMO
DOMINO
D. PHILIPPO EUGENIO
COMITI DE IORNES
HOUTEKERCKE ET DE HERLIES;
VICE-COMITI 'URNENSI;
BARONI DE HONDSCOTE;

Domino de la Baſſée, l'Eluſe, Tranſloy, Braine le Chaſteau, Iaut Ittere, Stavele, Crombecque, ſtehain, Durry, Eſterpinii, &c.

Magno Imperii Venatori Hæreditario, Turmæ Equitum po Rege Catholico Duiori.

ILLVSTRISIME DOMINE, Seſquianus eſt, quod nomini Tu *Elementa Geometriæ plan* & *ſolidæ* dicaverim. Iodit nunc *Arithmethica* mea tum thorica, prout tribus Euclidæis Liris continetur, tum practica univrſa; atque hæc fuit ſtudiorum tuoim, quibus ſedu-

lò juxtà ac fructuosè Matheſim, me inſtituente excoluiſti, palæſtra altera. Quo naturali inter ſe fœdere nexæ ſunt ſorores prorſus germanæ, ac filiæ Matheſeos primogenitæ, illo junctim ambas ad Te accedere volui, Nomini honorique tuo par ſymbolum delaturas, ut, à quo honoratas ſe agnoſcunt, antidorali velut munere viciſſim venerentur.

Scitum eſt illud Geometriam & Arithmeticam alas eſſe binas, quibus Matheſis hoc univerſum, quoquò patet, pervolet, ac ſupervolet: his ſine telluris lata, & profunda permeare nequit: eget porsùs, utriſque, ut ad lunæ, ſoliſque ſiderumque domos perveniat, atque è vicino contempletur, qualia quantaque ſint, quibuſque motibus agitentur. Jam caſtra & arces, quæ tertium nunc annum felicibus auſpiciis colis noſti ſub menſuram non cadere, niſi utraque iſthæc ala ſubſidio ſit, quâ partes omnes, latera, anguloſque accuratè perluſtres. Militrium denique acierum formas omnes varietatem,

tranſ-

tranſmutationes, earumq́ue vim minimè habebit perſpectas, qui cohortium turmarumq́ue cuneos hiſce alis non pervolitarit. Utramque diligenti ſtudio menti Tuæ feliciter adaptaſti; utramque ego à me excultam honori tuo appendo, ac dico.

Faxit propitium Nunen ita numerorum nos arcana ſcrutari, ut innumerabiles æternitats myriades, quæ unicuique mortalium beatæ vel miſeræ inevitabiliter emetiendæ ſunt, mente perennite circumferamus, illaſq́ue tandem felices interminabili gaudio reipsi fruendo numeremus. Perfectus ille ac felix Arithmeticus erit, problema iſtud qui ſolverit. Hoc Tibi ut eveniat, ubi caſtra multa inter pericula ſoſpes ac victor numeraveris, ex animo voveo, ac maneo

Illuſtriſſime Domine

nis. Tæ. Illuſtriſſimæ

Servus in Doto,

Andreas Tacvet Soc. Jeſu.

LECTORI
STUDIOSO.

ANno 1654. ad *uſum Juventitis mathematicæ, publico dedi* Elementa Geometriæ planæ, ac ſolidæ. *His in ejuſdem gratiam, quod tum me facturum addixeram, nunc Arithmeticam adjungo. Illam in duas partes diſtribuere viſum eſt.*

Prima, arithmetices elementa amplectitur; hoc eſt Euclidis libros ſeptimum, octavum, & nonum; quos quidem variis locis illuſtrare, & faciliores efficere conatus ſum. Unde ſubſtantiam Euclidis do, non verba. Ex his elementis dependet, quidquid hactenus de numeris ſcitur, aut ſciri deinceps poteſt.

Altera, arithmeticam practicam exhibet quinque libris explicatam. Hîc verò mihi duo fuere propoſita: primum, ut omnia præcepta ac regulas, quantâ poſſem perſpicuitate brevitateq́; proponerem; alterum, quod hactenus non ſcio factum ab ullo, ut præcepta ſingula ac

re-

regulas demonſtrarem. Qui ſolam praxim deſiderat, demonſtrationes prætereat, quas manifeſtè ſemper à præceptis diſtinctas reperiet. Illi verò, quibus mens ſublimior eſt, quos opus non delectat, cujus non perſpiciant rationem, ſi totum legerint, facient deſiderio ſuo, ut ſpero, ſatis. Erit fortaſſis, qui etiam Algebræ, & inprimis ſpecioſæ inſtitutiones hîc deſideret. Sed aliud hoc, & alterius temporis opus erit. His interim, amice Lector, utere ſi videbitur, ac fruere, bono tuo, ad gloriam Dei.

AP-

APPROBATIO CENSORIS.

HÆc de numeris Theoria & Praxis, numeris ſuis abſoluta, utiliter imprimi poterit. Datum Lovanii. Oct. 20. 1655.

ANTONIUS DAVÆUS *S. Theol. Doctor & Profeſſor Regius in Academia Lovanienſi nec non Apoſtolicus Librorum Cenſor.*

FACULTAS R. P. PROVINCIALIS.

E*Go infraſcriptus Societatis* IESU *per Flandro-Belgicam Præpoſitus Provincialis, poteſtate mihi facta ab admodum R. P. N. Goſuvvino Nickel Præpoſito Generali ejuſdem Societatis, facultatem concedo, ut* Arithmeticæ Theoria & Praxis, Auctore P. ANDREA TACQUET, *ab aliquot Societatis noſtræ Mathematicis approbata, typis mandetur. In quorum fidem has manu noſtrâ ſubſcriptas, & ſolito officii ſigillo munitas dedimus Bruxellæ 9. Septemb.* 1655.

THOMAS DEKENS.

ELEMENTORUM

ARITHMETICÆ.

LIBRI TRES.

Digitized by Google

DEFINITIONES.

1. VNitas eſt, ſecundùm quam unumquodque eorum, quæ ſunt, unum dicitur.

Omnis numeri principium unitas eſt.

2. Numerus eſt compoſita ex unitatibus multitudo.

3. Numerus numerum metiri dicitur, cùm minor aliquoties ſumptus majori æqualis fit.

4. *Metitur* 12. *quia ter* 4. *facit* 12. *Unitas metitur omnes numeros.*

4. Numerus numeri multiplex eſt, cùm minor metitur majorem, ſive cùm major minorem aliquoties continet præciſè.

5. Pars aliquota numeri eſt, quæ numerum metitur; pars aliquanta, quæ non metitur.

Numerus 2. *eſt pars aliquota* 10. *quia metitur* 10. *acceptus nimirum quinies.* 3. *verò eſt pars aliquanta* 10. *quia non metitur* 10. *nam ter acceptus facit* 9. *acceptus quater facit* 12.

6. Similes aliquotæ partes ſunt, quæ ſua tota æqualiter metiuntur: ſive, quæ in ſuis totis æquè ſæpe continentur.

2 & 3. *Sunt ſimiles aliquotæ numerorum* 10. & 15. *quia tam* 2. *in* 10. *quàm* 3. *in* 15 *continentur quinies: ſive tam* 2. *totum ſuum* 10. *quàm* 3. *ſuum totum* 15. *metiuntur per eundem numerum* 5.

10.	15.
2	3

7. Similes partes aliquantæ ſunt, quæ in ſuis totis æquè ſæpè continentur, atque inſuper æquè multæ ipſarum partes aliquotæ ſimiles.

Vel:

Vel: partes aliquantæ ſimiles ſunt, quæ æquè multas ſuorum totorum continent aliquotas ſimiles.

14 28 8 & 16. *Sunt ſimiles partes aliquantæ nu-*
8 16 *merorum* 14 & 28. *quia ſicuti* 8 *continetur ſemel in* 14 *atque inſuper* 6 *ſeu ter* 2. *hoc eſt tres quartæ partes ipſius* 8. *ita* 16 *in* 28 *continetur ſemel, atque inſuper* 12, *ſeu ter* 4. *hoc eſt etiam tres quartæ partes* 16.

Vel ſic: 8 *&* 16 *ſunt ſimiles partes aliquantæ totorum* 14 & 28. *quia ſicuti* 8 *continet totius* 14 *quatuor ſeptimas partes, nempe quater* 2. *ita* 16 *continet totius* 28 *quatuor ſeptimas, nempe quater* 4.

8. In numeris ratio, ſive proportio eſt, duorum numerorum mutua quædam habitudo ſecundùm exceſſum, vel defectum, vel æqualitatem.

In omni proportione duo ſunt termini, quorum is dicatur antecedens, qui primo loco, ſive in recto nominatur; alter conſequens. Cùm antecedens eſt major conſequente, dicitur proportio majoris inæqualitatis, ſeu majoris ad minus. Cùm antecedens eſt minor conſequente, proportio minoris inæqualitatis ſeu minoris ad majus appellatur. Cùm antecedens conſequenti par eſt, dicitur æqualitatis proportio.

9. In numeris duæ proportiones ſunt æquales, eædem, ſimiles (idem iſta ſignificant) ſive quatuor numeri (A. B. C. D) dicuntur proportionales, cùm minores utriuſque proportionis termini in majoribus eodem modo continentur. Continentur autem eodem modo, ſi minores (B, D) ſint majorum. (A, C) ſimiles partes *a* aliquotæ, vel ſimiles partes *b* aliquantæ.

a *vide def.* 6.
b *vide def.* 7.

A 8 2 B
C 16 4 D

A 14 8 B *Æquales proportiones ſic efferimus.*
C 28 16 D *8 eſt ad 2*
ut 16. eſt ad 4

Vel 8 habet ad 2 eandem rationem, quam 16 ad 4.

10. Cùm plures extiterint æquales rationes, & prioris conſequens fuerit antecedens poſterioris (ſic ut medii termini bis ſumantur,) proportio continua dicitur; & numeri ipſi dicuntur continuè proportionales.

Continuas rationes ſic efferimus: 1. 2. 4. 8. 16. 32.
1. eſt ad 2. ut 2. ad 4. & 4 ad 8. & 8. ad 16. &c.

11. Quod ſi unius æqualium proportionum conſequens non ſit antecedens alterius, ac proinde medii termini non accipiantur bis, diſcreta proportio erit; & numeri ipſi proportionales dicuntur, nullo alio addito.

Diſcretas proportiones ſic efferimus. 9. 3. 12. 4.
9 eſt ad 3. ut 12. ad 4.

A,	B,	C,	D,	E,
1	3	9	27	81
81	27	9	3	1

12. Cùm numeri fuerint continuè proportionales (A, B, C, D, E) ratio primi A ad tertium C duplicata dicitur, rationis quam habet primus A ad ſecundum B; & ratio primi A ad quartum D dicitur triplicata rationis primi A ad ſecundum B, & ſic deinceps.

De rationum denominatoribus & compoſitione vide Elementa noſtra geometrica l. 5. parte 3.

13. Numerus A multiplicare dicitur numerum B, cum B multiplicandus toties accipitur, quot ſunt unitates in A multiplicante.

Vel ſic: Numerus A multiplicat numerum B, cùm invenitur numerus C toties continens multipli-

multiplicatum B, quoties A multiplicans continet unitatem.

Verùm univerſaliùs multiplicatio ſic definitur. Numerus A multiplicat numerum B cùm numerus reperitur C, qui ita ſit ad B multiplicatum, ut A multiplicans ad unitatem.

C 8	B 4	
	A 2	1

Numerus C qui invenitur, dicitur productus ſeu genitus. Porrò cùm multiplicans A eſt numerus integer, ſemper productus C major eſt multiplicato B, ut patet ex def. 1. & 2. cùm verò multiplicans A eſt fractio minor unitate, productus C etiam erit minor multiplicato B, ut patet ex poſtrema definitione.

C $\frac{4}{3}$	B 4	
A $\frac{1}{3}$		1

Plures numeri ut 2, 4, 3, per invicem multiplicari dicuntur, ſi 2 in 4, faciat 8, & productum 8 ducatur in 3; productum enim ultimum 24 eſt id, quod ſit ex multiplicatione numerorum, 2, 4, 3.

Porrò idem apud arithmeticos eſt numerum in numerum ducere, quod, numerum per numerum multiplicare. Frequens etiam iſta locutio eſt, A per B, vel potius, A in B: hoc eſt A ductus ſeu multiplicatus per B.

14. Numerus A dicitur dividere numerum B, cùm numerus invenitur C indicans quoties A diviſor in B contineatur.

Et ſic diviſor A eſt pars diviſi ſeu dividendi B, ab invento (qui proinde quotiens dicitur) denominata.

B 12	3 C	
A 4	1	

Vel univerſaliter: Numerus A dividit numerum B, cùm alius numerus invenitur C ita ſe habens ad unitatem, ut diviſus B ad A diviſorem.

15. Numerus A metiri dicitur numerum B per X numerum

B 16	X 8	
A 2	1	

aliquem (qui quotiens appellatur) cùm metiens A toties ſumptus, quot in X quotiente ſunt unitates, menſum adæquat.

Hæc definitio differt à præcedenti, 1, quòd diviſio peragi poſſit, licèt diviſor dividendum non metiatur. 2 licèt diviſor ſit major dividendo, ut ſuo loco tradetur. Latiùs igitur patet diviſio quàm menſio.

16. Par numerus eſt, qui bifariam dividi poteſt. *Omnem ergo parem numerum aliquis numerus metitur per 2.*

17. Impar numerus eſt, qui bifariam dividi non poteſt: ſive, qui unitate differt à pari.

18. Pariter par eſt, quem par per parem metitur. *Talis eſt 24, quem par numerus 6, metitur per parem 4.*

19. Pariter impar eſt, quem par metitur per imparem. *Talis eſt 12, quem 4 par metitur per 3. imparem.*

20. Impariter impar eſt, quem impar metitur per imparem. *Talis eſt 21, quem 7 impar metitur per imparem 3.*

21. Primus ſeu incompoſitus numerus eſt, quem ſola unitas metitur, *ac proinde nullas habet partes aliquotas præter unitates.*

Tales ſunt, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, & alii infiniti. Porrò omnis primus numerus neceſſariò impar eſt, aliàs eum metiretur binarius.

22. Compoſitus numerus eſt, quem præter unitatem, aliquis numerus ab ipſo diverſus metitur; *ac proinde habet partes aliquotas ab unitatibus diverſas.*

Tales ſunt 4 6 8. 9, 10. 12. 14. 15. & alii infiniti.

23. Primi inter ſe numeri ſunt, quos nulla alia menſura communis metitur, quàm unitas,

Duo

Duo inter ſe primi ſunt 15. *&* 8. *quia licèt ſingulos aliqui numeri metiantur ac proinde neuter primus ſit: tamen nullus numerus utrumque metitur. Pari modo* 8. 10. 15. *ſunt tres primi inter ſe, quia nullus numerus, illos tres metitur & ſic deinceps.*

24. Compoſiti inter ſe numeri ſunt, quos præter unitatem aliquis numerus, communis menſura metitur.

Poteſt autem menſura communis eſſe unus datorum numerorum.

Duo inter ſe compoſiti ſunt 8. *&* 10. *quia utrumque metitur* 2. *ſimiliter* 5. *&* 15. *ſunt duo compoſiti inter ſe: quia* 5. *metitur & ſeipſum, &* 15. *Tres inter ſe compoſiti ſunt* 3. 9. 12. *quia* 3. *metitur* 9. *&* 12. *& ſe,* 6. 10. 12. 16. *ſunt quatuor compoſiti inter ſe, quia* 2. *metitur omnes quatuor.*

25. Planus numerus eſt, qui ex duorum numerorum multiplicatione producitur. Numeri autem invicem multiplicantes plani latera dicuntur.

Omnis ergo planus eſt compoſitus.

Sic planus eſt 12. *quia fit ex* 6. *per* 2. *item* 24. *quia fit ex* 4. *in* 6.

26. Solidus numerus eſt, qui ex trium numerorum multiplicatione producitur. Numeri verò ſe mutuò multiplicantes ſolidi latera dicuntur.

Omnis ergo ſolidus eſt compoſitus.

Solidus eſt 24 *quia fit ex multiplicatione trium numerorum* 2. 3. 4. *nam* 2. *in* 3. *facit* 6. 6. *autem in* 4. *facit* 24.

27. Similes plani & ſolidi ſunt, qui proportionalia habent latera.

6. 24. ſunt plani ſimiles, quorum latera ſunt, 2. 3. & 4. 6. eſt enim ut 2. ad 3. ſic 4. ad 6. Solidi ſimiles ſunt 24. 192. quia latera unius, 2. 4. 3. ſunt proportionalia lateribus alterius, 4. 8. 6.

2	3	2. 4. 3.
	6	24
	24	192
4	6	4. 8. 6.

28. Quadratus numerus eſt, qui fit ex multiplicatione duorum æqualium numerorum; ſive ex multiplicatione alicujus numeri per ſeipſum: qui radix quadrata dicitur.

Primus quadratorum eſt 4. qui fit ex 2. in 2. ſive ex 2. in ſe. Secundus eſt 9. qui fit ex 3. in ſe: & ſic deinceps in infinitum.

29. Cubus eſt, qui fit ex multiplicatione trium æqualium numerorum, ſive ejuſdem ter poſiti: qui radix cubica appellatur.

Primus cubus eſt 8. fit ex multiplicatione binarii ter poſiti (2. 2. 2.) nam 2. in 2. facit 4. & 4. in 2. facit 8. Secundus eſt 27. qui fit ex multiplicatione ternarii ter poſiti, (3. 3. 3.) nam 3. in 3. facit 9. & 9. in 3. facit 27.

30. Perfectus numerus eſt, qui omnibus ſuis partibus aliquotis æqualis eſt.

Primus perfectus eſt 6. illius enim omnes aliquotæ partes ſunt 1. 2. 3: quæ ſimul faciunt 6. Secundus eſt 28. nam illius omnes aliquotæ ſunt 1. 2. 4. 7. 14: quæ ſimul efficiunt 28. de his vide prop. ultimam lib. 9. & ſcholium.

Digitized by Google

AXIOMATA.

AB 1. Numeri A, B æquè multiplices ejuſ-
Z dem numeri Z, ſunt æquales. Et numeri æquè multiplices æqualium numerorum, æquales ſunt.

2. Æquales ſunt numeri A, B, quorum æquè multiplex eſt idem numerus Z.

Et æquales ſunt illi numeri, quorum æquè multiplices ſunt æquales.

3. Æquales ſunt numeri, qui ſunt ejuſdem numeri eadem pars, ut dimidia, vel tertia, vel quarta, &c.

Et illi numeri ſunt æquales, qui æqualium numerorum eadem pars ſunt.

4. Æquales ſunt numeri, quorum unus numerus eadem pars eſt.

Et illi numeri ſunt æquales, quorum æquales numeri eadem pars ſunt.

5. Unitas omnem numerum per unitates, quæ in ipſo ſunt (hoc eſt per ipſum numerum) metitur.

6. Omnis numerus ſeipſum metitur per unitatem.

7. Si numerus A multiplicans alium B genuerit aliquem C; multiplicatus B genitum C metitur per multiplicantem A.

4 A B 3
C
12

Patet ex defin. 13. *&* 15.

8. Si numerus A numerum C metiatur ſeu dividat per quotientem B; etiam quoties B multiplicans metientem A producet menſum C: ſive metiens A per quotientem B multiplicatus, reſtituit menſum C.

Patet ex defin. 13. 15. 14.

9. Quolibet numero ſumi poteſt major.

10. Numerus A metiens quoſcumque numeros B C, C D, D E, etiam B E compoſitum ex ipſis metitur.

A .—
B——C————D——E

11. Numerus (A) metiens quemcunque numerum (B) metitur quoque omnem numerum (C) quem ille (B) metitur

A — 2
B—— 4
C———— 8

12. Numerus A metiens totum B C, & ablatum B D, metitur & reliquum D C.

A —
B————D——C

ADMONITIO
AD
LECTOREM.

EXpoſitis Definitionibus, & Axiomatis, ex quibus tota numerorum ſcientia deducetur, ad propoſitiones ipſas progedior, ſi priùs quiddam monuero lectores, quod intereſt ipſos ſcire. Euclides pro numeris ubique litteras alphabeti aſſumit optimo ſanè conſilio: ſic enim propoſitionum ac demonſtrationum univerſalitas meliùs exprimitur. At cùm numerum quempiam per alium multiplicat, A puta per B, productum tertiâ quâdam litterâ puta C, deſignat. Ex quo id plerumque incommodi naſcitur, ut cùm plures inſtitui multiplicationes neceſſe eſt, memoriâ excidat, quę producta ex quorum multiplicatione laterum genita ſint, quod moleſtum eſſe ſolet lectoribus & tenebras offundere. Sępe igitur expediet productum multiplicationis eo modo exprimere, quo in logiſtica ſpecioſa utimur, ſolâ vi-

delic

delicet numerorum, qui ſe invicem multiplicant, appoſitione, ut ſi cupiam multiplicare numerum A per numerum B, productum erit AB. Primus (quod ſciam) logiſticam ſpecioſam vel invenit, vel certè adhibuit Franciſcus Vieta: ſed Renatus Cartheſius ad commodiorem formam revocavit Præcepta hujus methodi à Franciſco à Schooten conſcripta, jam in lucem ſunt edita per Fr. Bartholinum.

Porrò operationum ſpecioſarum prima rudimenta hæc ſunt. Si cupiam numerum A addere numero B, ſumma erit A + B. Signum enim (+) plus ſignificat. Si ſumma quæritur plurium A, B, C, ea erit A + B + C.

Si à numero A ſubtrahendus eſt numerus B, reſiduum erit A —— B. Signum enim (——) ſignificet minùs.

Si numerus A multiplicandus ſit per numerum B, productum (ut jam dixi ſupra) erit AB ſeu BA.

Si A per A; productum erit AA.

Si AB per BC; productum erit ABBC.

Si AA per A; productum erit AAA

Si A + B + C per D; ſingulis particulis appone D; productum erit AD + BD + CD.

Si A, B, C, D, per invicem; productum erit ABCD.

Et ſic in aliis, Ubi id notandum eſt, perinde eſſe quo ordine in producto litteræ ſibi mutuò apponantur. Ut ſi productum quæratur ex numeris A, B, C, D inter ſe multiplicatis, illud erit vel A B C D, vel A C B D, vel A D B C &c. Cùm enim appoſitio numerorum multiplicationem deſignet, ea verò inter plures numeros quocunque ordine facta idem ſemper productum exhibeat,

beat, (quod in ſcholio prop. 19. l. 8. demonſtrabimus) perinde etiam erit, quo ordine ſibi mutuo apponantur.

Denique ſi numerum A dividere oporteat per numerum B, quotiens deſignabitur, ſi infra dividendum A, lineolâ interpoſitâ ſcribatur diviſor B. A.B $\frac{A}{B}$

Si A B per A; quotiens erit B. A quippe ductum in B reſtituit A B.

Si AB + AC—AD per A; quotiens erit B+C —D. Nam B+C-D ductum in A, reſtituit AD + AB—AC.

Hac methodo, quod quidem ad multiplicationem attinet, in demonſtrandis horum trium librorum propoſitionibus non paucis utemur, tum videlicet cùm facilitari inde demonſtrationes poterunt; id quod ſæpe accidet, cùm plurimum referat in decurſu demonſtrationis producti latera ante oculos obſervari. Verùm hoc obſervandum erit, duas litteras conjunctas aliquando tantùm ſimplicem numerum deſignare ut in tribus primis prop. & paucis aliis, quod ſatis ex textu ipſo & ſenſu verborum colligetur.

Cæterùm non mihi propoſitum fuit hîc tradere præcepta Logiſticæ ſpecioſæ; de qua, atque Algebra tum numeroſâ, tum ſpecioſâ, ſi Deo placuerit, alio loco acturus ſum; ſed ea ſolùm attingere, quorum in his elementis, ac deinde in Arithmetica practica uſus erit,

E L E-

ELEMENTORUM ARITHMETICÆ

LIBER PRIMUS.

EUCLIDI SEPTIMUS.

In citationibus librorum, Euclidis numeri retinentur.

PROPOSITIO PRIMA.

SI à duobus numeris inæqualibus detrahatur ſemper minor de majore alternâ quâdam detractione ; neque reliquus unquam metiatur præcedentem , quoad ventum ſit ad unitatem , primi a *inter ſe erunt dati numeri.* a *vide deſin. 14.*

Dati ſint duo numeri AB, & CD, minor CD detractus ex AB, quoties poteſt relinquat EB: EB verò detractus ex CD quoties poteſt relinquat FD: FD, quoties poteſt detractus ex E B relinquat unitatem. Dico numeros AB, CD, eſſe primos inter ſe.

A————E--G-B
C---F--D
H

Eſto enim , ſi fieri poteſt , numerorum AB, CD communis menſura numerus aliquis H. Quoniam ergo H. vis metiri CD, & CD metitur *b* AE , etiam H *c* metietur AE ſed H vis metiri quoque totum AB. ergo H metitur *d* etiam reliquum EB. Metitur autem EB ipſum

b *hyp.*
c *ax.* 11
d *ax.* 12

CF.

Digitized by Google

e *hyp.* *e* C F. Ergo & H *f* metitur C F. Quare cum H
f *ax.* 11 volueris metiri etiam totum C D, H quoque
g *ax.* 12 metietur reliquum *g* FD : FD autem metitur *h*
h *hyp.*
i *ax.* 11 EG, ergo H quoque metitur *i* EG oſtendi verò
k *ax.* 12 ſupra H metiri etiam totum E B. Ergo H metitur *k* etiam reliquum G B, numerus unitatem, quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO II.

Duobus numeris datis (AB, DF) non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram invenire.

A————C——B
D——E—F
O——

Minor D F detractus ex majori A B quoties poteſt, relinquat C B. C B detractus quoties poteſt ex D F relinquat E F, & ſic deinceps.

Hâc alternâ detractione relinquetur tandem aliquis numerus, qui præcedentem metiatur; nam ſi ad unitatem deveniretur, dati numeri
a *præced.* *a* eſſent primi, contra hyp. Eſto igitur reliquus E F, qui præcedentem C B metiatur. Dico E F eſſe maximam communem menſuram numerorum A B, & D F. Quod ſic demonſtrabitur.

b *conſt.* E F metitur *b* C B, & C B metitur *c* D E.
c *conſt.* Ergo E F etiam *d* metitur D E. Metitur verò
d *ax.* 11 E F etiam ſe. Ergo E F. metietur *e* totum D F.
e *ax.* 12
f *conſt.* ſed D F metitur *f* A C. Ergo E F metitur etiam
g *ax.* 11 *g* A C. Metitur autem E F etiam *h* C B. Ergo
h *conſt.* E F metitur quoque *i* totum A B. E F igitur
i *ax.* 10 ipſorum A B, & D F communis menſura eſt.

Quod verò ſit maxima ſic oſtenditur. Eſto ſi fieri

Digitized by Google

fieri poteſt alia O major quàm E F. Quoniam vis O metiri D F; D F verò metitur AC, etiam O metietur *k* A C. vis autem O etiam metiri A B. ergo O metietur quoque *l* C B. ſed C B *m* metitur D E. ergo O etiam metitur *n* D E. Quare cùm O metiri velis etiam totum D F, metitur O quoque *o* reliquum EF, ſe minorem, quod eſt abſurdum.

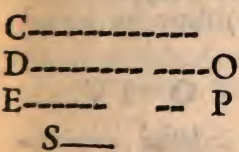
k *ax.* 11
l *ax.* 12
m *conſt.*
n *ax.* 11
o *ax.* 12

Corollarium.

NUmerus (O) metiens duos numeros (A B, D F) metitur quoque maximam eorum communem menſuram (E F.)

PROPOSITIO III.

TRibus numeris datis, non primis inter ſe (C, D, E) *maximam eorum communem menſuram invenire.*



Inveniatur O maxima *a* communis menſura duorum C, D. Si O etiam metitur E, erit maxima communis mēſura trium C, D, E: nā ſi eſſet aliqua S, major quàm O, metiretur S etiam O per corol. præced. quod eſt abſurdum, cum S ponatur major quàm O.

a *præced.*

Quod ſi O non metiatur E, ſaltem O & E inter ſe compoſiti erunt; cùm enim C, D, E, *b* ſint tres inter ſe compoſiti, aliqua menſura commu-

b *hyp.*

nis

c *def.* 24. nis eos *c* metietur, ac proinde etiam *d* ipſum O.
d *corol. præc.* Duorum igitur, O, E, inveni maximam communem menſuram P. Dico, P, communem eſſe maximam trium C,D,E.

e *conſt.* Cùm enim P *e* metiatur O; O verò metiatur
f *conſt.* *f* C, D; etiam P *g* metietur C, D. Metitur au-
g *ax.* 11 tem *h* P etiam E. Ergo P, eſt menſura trium C,
h *conſt.* D,E. Quod verò maxima ſit, ſic oſtenditur. Sit
i *corol. præc.* alia S, major ſi fieri poteſt, quàm P. Quoniam ergo
k *idem cor.* S metitur C, D, E, metietur *i* quoque ipſorum
l *conſt.* C, D, maximam menſuram G. Quia ergo S metitur E & O, metietur *k* rurſum S eorum maximam menſuram *l* P, major minorem. Quod eſt abſurdum.

D——C——E——
O——S——
P—

Corollarium.

1. EOdem artificio reperietur quatuor, imò quotvis non primorum inter ſe numerorum, menſura communis maxima.

2. Numerus (S) metiens quoſcunque numeros (E, D, C) metitur etiam eorum maximam communem menſuram (P) Patet ex ultimâ parte demonſtrationis.

PROPOSITIO IV.

ET reliquæ uſque ad 15. *incluſivè, continentur in propoſitionibus univerſalibus libri* 5. *elem. Geom.*

PROPOSITIO XVI.

DVo numeri (A,B) *ſe mutuò multiplicantes æquales numeros producunt* (C.D.)

Quo-

Digitized by Google

Quoniam A multiplicans B facit D, erit *a* unitas ad A, ut B ad D. Igitur *b* permutando; ut unitas eſt ad B, ſic A ad D. Rurſus quia, B multiplicans A facit C, erit ut unitas *c* ad B, ſic A ad C. Ergo A ad D & C eandem habet rationem. Ergo C & D *d* æquales ſunt. Quod erat demonſtrandum.

unit. 1.
A 6 B 4
C 24 D 24

a *def.* 13. *l.* 7.
b 16. *l.* 5.
c *def.* 14. *l.* 7.
d 9. *l.* 5.

Corollarium.

1. Si numerus A multiplicans numerum B, fecerit C, multiplicans A, metietur productum C per B multiplicatum.

A. B
C

Nam quia A in B facit C, etiam B in A facit C per hanc. Ergo cûm A, qui priùs erat multiplicans, jam ſit etiam multiplicatus, reſpectu ejuſdem producti C, patet ex axio. 7. A metiri B. per C.

2. Si A metitur ſeu dividit C per B; etiam B quotiens per A metietur eundẽ C.

A. B.
C.

Nam quia A per B metitur C, ergo per ax. 8. B multiplicans A faciet C. Ergo per hanc 16. etiam A multiplicans B faciet C. Ergo per ax. 7. B per A metitur C. Quod erat propoſitum.

PROPOSITIO XVII.

SI numerus (A) multiplicans quotcunque numeros (B, C) totidem genuerit numeros (AB, AC) erunt geniti (AB, AC) multiplicatis (B, C) proportionales.

unitas	Cùm enim A multiplicans B, fecerit
a *def.* 4. *l.* 7. 1	A B, erit ut *a* unitas ad A, ſic B ad
b *ibid.* A	AB. Rurſus cùm A multiplicans C,
c 11. *l.* 5. B. C.	fecerit AC, erit ut *b* unitas ad A, ſic
AB AC.	C ad AB. Ergo B eſt ad A B, ut *c* C
	ad A C. Igitur permutando eſt B ad

d 16. *l.* 5. C, *d* ut AB ad AC. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

CÆpimus hîc multiplicationis productum exprimere ſolâ numerorum multiplicantium mutuâ appoſitione; de quâ vide dicta ante principium hujus. 7. libri. Hæc methodus cùm adhibebitur (quod ingenti plerumque compendio fiet) commodiùs efferetur propoſitione 17. hunc in modum.

Numeri quotcunque (A B, B C) commune latus habentes (B) eam inter ſe proportionem habent quàm latera reliqua A & C.

Latera numeri ſunt, ex quorum multiplicatione producitur. Porrò ut huic methodo, quæ (ut dixi) commodi permultum ac compendii habet, tyrones meliùs aſſueſcant, præter exemplum in prop. adductum, alia adhuc nonnulla viſum eſt ſubjungere.

1. *AA eſt ad AB ut A ad B.*
2. *AB eſt ad BB ut A ad B.*
3. *AAA eſt ad AAB ut A ad B.*
4. *ABB eſt ad BBB ut A ad B.*

In 1. commune latus eſt A, reliqua verò ſunt A ſecundum & B. In 2 latus commune eſt B; reliqua verò ſunt A tertium & B. In 4. latus commune eſt BB; reliqua ſunt A, & B tertium.

5. *AA*

5. AA. AB. BB. Sunt continuè proportionales in ratione A ad B. patet ex 1. & 2.

6. AAA. AAB. ABB. BBB ſunt continuè proportionales in ratione A ad B. patet ex 3. & 4.

7. AB, AC, AD, AE, AF eam inter ſe rationem habent quam B, C, D, E, F. Patet ex ipſa propoſitione.

Quantus ſit hujus ſcholii uſus ad demonſtrationes prolixas aliàs & difficiles facillimè expediendas, tum in his libris deinceps, tum in arithmetica practica, plurimis locis apparebit.

PROPOSITIO XVIII.

SI quotcunque numeri (B, C) multiplicantes eundem numerum (A) totidem genuerint numeros (D, F) erunt geniti (D, F) multiplicantibus (B, C) proportionales.

B 2 C 4 Nam cùm B per A fecerit D. etiam
A 3 *a* A per B facit D: & cùm C per A a 16. *l.* 7.
D 6 F 12 faciat F, etiam *b* A per C faciet F. b *ibid.*
Ergo *c* B, eſt ad C, ut D ad F. Quod c *præced.*
erat demonſtrandum.

Corollarium.

NUmerus A dividens ſeu metiens quotcunque numeros (I, P) gignit quotientes (R, S) numeris diviſis ſeu menſis proportionales. *Vide Scema pag. ſeq.*

Nam, quoniam A ipſos I, P, metitur ſeu dividit per quotientes R, S, manifeſtum eſt ex 8. axio. A, in R, & S. ductum producere I & P. ergò per 17. ut I. eſt ad P, ſic R, eſt ad S.

Aliter.

I 12 P 26 Cùm A metiens ſeu dividens A fe-
d *def.* 14. A 4 cerit R. erit ut *d* unitas ad R, ſic
e 16. *l.* 5. R 3 S 5. A ad I. Igitur *e* permutando, ut
unit. unitas eſt ad A, ſic R eſt ad I. Rur-
E ſum cùm A metiens P, fecerit S,
f *def.* 14. erit *f* unitas ad S, ut A ad P. Ergo permutando ut unitas eſt ad A, ſic S eſt ad P. quare cùm jam oſtenderim, etiam R eſſe ad I,
g 11. *l.* 5. ut unitas eſt ad A, erit *g* R ad I, ut S ad P. Et permutando R ad S, ut I ad P. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIX.

SI quatuor numeri (A, B: C, D) proportionales fuerint, genitus (AD) ex primo (A) & quarto (D) genito (BC) ex ſecundo (B) & tertio (C) æqualis erit. Et è converſo.

A 3	B 2
C 6	D 4
BC 12	AD 12
	AC

a 18. *ant.* 17. *l.* 7. 1. Pars. A multiplicans C faciat AC. AC eſt ad AD *a* ut C
b *per eand.* ad D: & AC eſt ad BC *b* ut A ad
c *hyp.* B Quare cùm *c* A ſit ad B ut C
d 11. 5. ad D, etiam AC *d* eſt ad AD, ut
e 9. *l.* 5. A C eſt ad BC. Ergo BC, AD, *e* æquales ſunt.
f 7. *l.* 5. Quod erat demonſtrandum.
g 8. 7.
m 11. 5. Pars 2. Quoniam geniti AD, BC, jam ponuntur æquales, erit *f* A C, ad BC, ut A C ad B C. Sed ut A C eſt ad B C, ſic *g* A eſt ad B: & ut AC eſt ad AD, ſic C eſt ad D. Ergo *n* A eſt ad B, ut C ad D. Quod erat demonſtrandum.

Co-

Corollarium 1.

SI duo numeri B,C metiantur ſeu dividant eundem numerum A, per quotientes O, P, erit ut B ad C, ita reciprocè P ad O.

A	
B.	C
O.	P

Nam quia B,C metiuntur ſeu dividunt A per O, & P, ergo per ax. 8. tam B in O, quàm C in P, faciunt A. Ergo per hanc, B eſt ad C, ut P, ad O.

Corollarium 2.

SI A ad B majorem rationem habeat, quàm C ad D; A D genitus ex primo A in quartum D major erit, quàm BC genitus ex ſecundo B in tertium C.

A 4	2 B
C 6	4 D
AD 16.	12 BC
A	C

Et è converſo.

1. Pars. A in C faciat AC. A C ad B C eandem proportionem habet, quàm *a* A ad B; hoc eſt majorem *b* quàm C ad D; hoc eſt majorem *c* quàm rurſus A C ad AD. Ergo BC minor *d* eſt quàm AC.

2. Pars. Quoniam A D jam ponitur major quàm BC, erit ratio AC, ad BC *e* major ratione A C ad A D. Sed ratio A C ad B C eſt ratio *f* A ad B; & ratio AC ad AD eſt ratio *g* C ad D. Ergo etiam ratio A ad B major eſt ratione C ad D.

a *ſcho. p.* 17. *l.* 7.
b *hyp.*
c *ſchol. p.* 17.
d 10. *l.* 5.
e 8. *l.* 5.
f *ſcho.*
g *idem.*

PROPOSITIO XX.

SI *tres numeri* (*A,B,C*) *proportionales fuerint*, (*AC*) *genitus ab extremis*, *æqualis eſt* (*BB*) *quadrato medii.*

Et ſi genitus ab extremis , quadrato medii æqualis eſt , tres numeri proportionales erunt.

A 4 B 8 Pars 1. Ponatur medius B bis,
B 8 C 16 igitur per hypoth. A eſt ad B, ut
BB 64 AC 64 B, ad C. Cùm ergo quatuor jam habeantur proportionales , erit
a 1. *part. præced.* *a* genitus ab extremis A C, par genito ex B ſecundo & B tertio , hoc eſt quadrato ipſius B.

Pars 2. Eodem modo demonſtrabitur ex 2. parte præcedente.

PROPOSITIO XXI.

NUmeri (A & B) omnium ſibi proportionalium minimi , numeros ſibi proportionales (C, & D) æquè metiuntur.

Nam quia per hyp. A eſt ad B, ut C ad D. etiam permutando A eſt ad C, ut B ad D. Ergo A
b *def.* 9. & B ipſorum C, & D, ſunt *b* partes ſimiles, vel aliquotæ, vel aliquantæ. (Eſſe verò A, B minores ipſis C, D patet ex hypotheſi. Sed non ſunt ſimiles aliquotæ; quod ſic oſtendo: ſi A, B, ipſorum C, D
c *def.* 7. ſint ſimiles aliquantæ, ergo *c* A continet O talem aliquotam ipſius C , qualem B continet ipſius D, puta P, ac pro-
d *def.* 6. inde *d* O eſt ad C, ut P eſt ad D, &
e 16. *l.* 5. permutando *e* O eſt ad P, ut C eſt ad D; hoc eſt ut A ad B. ſed A, B, continent ipſos O, P. ergo A, B non ſunt minimi ſuæ proportionis. Quod evertit hypotheſim. Igitur A, B, non ſunt ipſorum C, D ſimiles aliquantæ. Reliquum eſt igitur ut ſimiles aliquotæ ſint ; ac proinde ipſos C, D æquè metiuntur. Quod erat demonſtrandum.

A 2 B 3
O P
C 6 D 9

Co-

Corollarium.

A. B. C. D E.
O. P. Q. R. S.
F, G. H. I. K.

EOdem prorſus modo Demonſtrabitur, ſi numeros (A,B,C,D,E) omnium ſibi proportionalium minimos, quocunque extiterunt numero. totidem ſibi proportionales (F,G,H,I,K,) æqualiter metiri.

PROPOSITIO XXII.

COntinetur in prop. 22. l. 5.

PROPOSITIO XXIII.

PRimi a inter ſe numeri (A, B) ſunt omnium ſibi proportionalium minimi. a defin. 23.

A 15 B 8
C D
E
unit.

Sint enim alii (ſi fieri poteſt) C, D, minimi & proportionales ipſis A, B. Igitur C, D, metiuntur *b* ipſos A, B, æquè, hoc eſt per eundem numerum E. Quia ergo C metitur A per E, unitas eſt ad E, ut C ad A: & permutando, ut unitas eſt ad C, Sic E eſt ad A ſed unitas metitur C. Ergo etiam E metitur A. Eodem modo oſtendam E metiri B. Cùm igitur E. metiatur A & B, non erunt A, B primi inter ſe, quod evertit hypotheſim. b 21. l. 7. def. 15.

Corollarium.

A. B. C. D.
F. G. H. I.
E.
unitas

Eodem prorſus modo demonſtrabitur, ſi quotvis fuerint numeri (A, B, C, D, E,) Primi inter ſe, eos fore quorumlibet ſibi totidem proportionalium minimos.

PROPOSITIO XXIV.

NUmeri omnium ſibi proportionalium minimi (A, B) ſunt inter ſe primi

Si non; communis menſura E metiatur A per C, & B per D. Ergo *d* ut A ad B, ſic C ad D. Cùm ergo C, D ſint minores quàm A, B, non erunt A, B minimi omnium ſibi proportionalium: quod evertit hypotheſim.

A 4. B 5
E
C D

d cor. p. 18. l. 7.

Corollarium.

A.B.C.D
E
F.G H.I

Eodem modo demonſtrabitur, ſi quotcunque fuerint numeri (A, B, C, D) quorumlibet ſibi totidem proportionalium minimi, eos fore inter ſe primos.

PROPOSITIO XXV.

NUmerus (N) qui ex duobus (A, D) inter ſe primis metitur unum (A) ad reliquum (B) primus eſt.

A B
N X

Nam ſi N, B non ſint primi inter ſe, utrumque metiatur X. Quoniam ergo X metitur N, & N metitur *a* A, etiam X metietur *b* A. Volebas autem X etiam metiri B. Ergo A, B non ſunt inter ſe primi, quod repugnat hypotheſi.

a hyp.
b ax. 11.

PROPOSITIO XXVI.

SI duo numeri (A, B) ad quempiam (C) primi fuerint; etiam (A B) ex iis genitus, ad eundem (C) primus erit.

Si

A7. B3 Si enim A B & C non ſint inter ſe pri-
C8 mi, utrumque metiatur D per F. Ergo
AB21 D in *c* F facit AB, Atqui etiam *d* A in c *ax.* 8.
D---F---B facit AB: Ergo D eſt ad A, *e* ut B ad d *hyp.*
F. Jam verò, quia A & C ſunt inter ſe e 19. *l.* 7.
primi, & D volebas metiri ipſum C, erit *f* D ad f *præc.*
A primus. Ergo D & A, in ſua proportione *g* ſunt g 23. *l.* 7.
minimi. Ergo ſibi proportionales *h* B, F, equè me- h 21. *l.* 7.
tiuntur, D nempe ipſum B, & A ipſum F. Quare cùm D. volueris etiam metiri ipſum C, metietur D utrumque C ac B. Ergo C, B non ſunt primi inter ſe; quod hypotheſim evertit. Primus ergo erit A B ad C. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXVII.

SI duo numeri (A B) fuerint inter ſe primi, etiam (A A) quadratus unius, ad reliquum (B) primus erit

A4 B7 Ponatur A bis. Quia igitur A *a* prior a *hyp.*
AA 16 primus eſt ad B, etiam A poſterior ad
A. B primus erit. Ergo factus ex A in A,
hoc eſt, AA, ad B etiam *b* primus eſt. b *præc.*

PROPOSITIO XXVIII.

SI duo numeri (A, B) ad duos numeros (C, D) uterque ad utrumque primi fuerint, etiam ex iis geniti (AB, CD) inter-primi erunt.

A B Nam, quia *a* A & B primi ſunt ad C, a *hyp.*
AB etiam *b* A B primus erit ad C. Rur- b 26. *l.* 7.
C D ſum quia A & B primi ſunt *c* ad D, c *hyp.*
CD etiam A B ad D primus erit. Cùm
igitur C & D ad AB primi ſint, etiam

d 26. CD, ex iis genitus ad A B *d* primus erit. Quod
l. 7. erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXIX.

SI duo numeri (A, B) inter ſe fuerint primi, etiam eorum quadrati (AA, BB) & cubi (AAA, BBB) & ſic deinceps , inter ſe primi erunt.

Quoniam, A, B ſunt primi
a 27. inter ſe, etiam AA ad B *a* pri-
l. 7. b *per eand.* mus eſt. Et quoniam AA, ac B
ſunt primi inter ſe, etiam *b* BB
ad AA primus erit. Quod erat
primum demonſtrandum.

A	B
AA	BB
AAA	BBB
AAAA	BBBB

Rurſus quoniam A, B, inter ſe primi ſunt,
c *per eand.* etiam BB ad A *c* primus erit. Ergo B & BB ad A
primi ſunt. oſtenſum quoque eſt, A & AA ad B
eſſe primos. Ergo AAA genitus ex A in AA ad
d 28. BBB genitum ex B in BB *d* primus eſt. Quod
l. 7. erat alterum.

Denique quia A & AA ad B primi ſunt etiam
e 26. AAA ex iis factus ad *e* B primus eſt. Eodem
l. 7. modo quia B & BB ad A primi ſunt, etiam BBB
f *ibid.* ad A *f* primus erit. quoniam igitur A, & AAA
g 28. ad B, item B ac BBB ad A, primi ſunt, etiam
l. 7. ex iis geniti AAAA, & BBBB inter ſe *g* primi
erunt. Et ſic deinceps in infinitum.

PROPOSITIO XXX.

SI duo numeri (A, B) inter ſe primi fuerint, etiam (A † B) uterque ſimul ad quemlibet illorum primus erit.

Et

Et ſi uterque ſimul (A † B) ad alterutrum primus fuerit, etiam qui in principio dabantur numeri. (A, B) inter ſe primi erunt.

Pars. 1. Nam ſi A † B ad A, non ſit primus, metietur eos numerus C, qui proinde etiam *a* metietur B. Ergo A, B non ſunt inter ſe primi: quod repugnat hypotheſi. a *ax.* 11.

A † B
C·——

Pars 2 ſi primi non ſint A, B, metietur eos C, qui proinde metietur *b* etiam A † B; quod hypotheſim evertit. b *ax.* 10.

Corollarium.

Si A † B ad A primus eſt, etiam A † B ad B primus erit. Nam, quia A † B ad A primus eſt, erunt A, B inter ſe primi per 2 part. Tum quia jam primi inter ſe ſunt A, B. etiam per 1. partem A † B ad B primus erit.

PROPOSITIO XXXI.

OMnis primus numerus (A) ad omnem numerum (B) quem non metitur, primus eſt.

Nam ſi A, B non ſint primi inter ſe, metietur eos aliquis numerus C, diverſus ab A, cùm A, per hypotheſim non metiatur B. Ergo C non eſt *a* primus. a *defin.* 21.

A. B

C

PROPOSITIO XXXII.

SI planum a *numerum (AB) aliquis primus (C) metitur, is etiam è plani lateribus (A, B) alterutrum metietur.* a *defin.* 25.

Pla-

A. B
AB
b *præc.* C. D——
c 23. *l.* 7.
d *ax.* 8.

Planum AB metiatur primus C per D, ſi jam C non metiatur A, erunt C, A *b* primi inter ſe, ideoque in ſua proportione *c* minimi. Quia autem C metitur A B per D, ergo C in D *d* facit A B. ſed etiam A in B facit A B. Ergo C eſt ad A ut *e* B ad D. Quare *o* cùm C, A ſint in ſua proportione minimi, C metietur *f* B. Eodem diſcurſu probabitur C metiri A, ſi non metiatur B, Liquet ergo propoſitum.

e 19. *l.* 7. o 23. *l.* 7. f 21. *l.* 7.

PROPOSITIO XXXIII.

OMnem compoſitum numerum, aliquis primus metitur.

F
N——P——

a *def.* 22.

Compoſitus quicunque eſto F. Eum igitur *a* metiuntur unus vel plures numeri, quorum minimus ſit N. Dico N primum eſſe. Si enim primus non eſt, eum metietur aliquis, P; qui proinde, licèt minor ſit quàm N, metietur *b* etiam F. Quod eſt abſurdum cùm N, ponatur minimus omnium, qui F metiuntur.

b *ax.* 11.

PROPOSITIO XXXIV.

OMnis numerus aut primus eſt, aut ab aliquo primo menſuratur.

Patet ex præcedenti.

PROPOSITIO XXXV.

NUmeris datis quotcunque (A, B, C) minimos ipſis proportionales invenire.

In-

A. B. C.
O —
D. E. F
P. Q. R
X—

Inveniatur *a* O maxima menſura, communis datorum A, B, C; quæ eos metiens ſeu dividens, Faciat D, E, F. Dico hoc datis A, B, C, eſſe proportionales minimos. Si menſura communi careant, erunt ipſi inter ſe primi per 1. 7, adeoque minimi in ſuá proportione per. 23. Eſſe proportionales D, E, F Patet ex corol. p. 18. Minimos eſſe ſic oſtendo, ſint, ſi fieri poteſt, alii P, Q, R minimi proportionales ipſis A, B, C. Ergo P, Q R metiuntur *b* A, B, C. per eundem numerum, ut per X. Ergo P. in X. facit *c* A. ſed etiam D in O facit *d* A. Ergo *e* ut P eſt ad D, ſic O eſt ad X Sed P volebas eſſe minorem quàm D. Ergo etiam O minor eſt quàm X. Jam quia, P, Q, R metiuntur A, B, C per X, patet X in P, Q, R *f* producere A, B, C; ac proinde X metiri *g* A, B, C. per P, Q, R, Ergo O non eſt ipſorum A, B, C maxima communis menſura, quod evertit hypotheſim.

a 3. *l.* 7.
b 21. & *coroll. l.* 7
c *ax* 8.
d *conſt.* & *ax.* 8.
e 19. *l.* 7.
f *ax.* 8.
g *ax.* 7.

Corollarium.

MAxima menſura quotlibet numerorum ipſos metitur per minimos omnium ipſis proportionalium.

PROPOSITIO XXXVI.

D*Vobus numeris datis (*A, B*) reperire minimum numerum, quem metiuntur.*

Si

Si dati A, B ſunt inter ſe primi, ab iis genitus AB, eſt quæſitus. *Nam quia* A in B facit AB, A metietur *a* A B. Et quia B in A facit etiam *b* A B, B metietur A B. Ambo igitur A & B metiuntur A B.

A. B
AB
O
N. P

a *ax.* 7.
b 16. *l.* 7.

Quod verò minimus ſit A B, quem A & B, metiuntur, ſic oſtendo. Eſto, ſi fieri poteſt, O minor, metianturque, A & B, ipſum O per N, & P. Quare *d* A eſt ad B. ut P. ad N. Quia autem A B. ſunt *e* primi, erunt minimi in ſua *f* proportione, ac proinde A metitur P, *g* & B metitur N. Jam quia A in B facit A B, & idem A in N facit O, ut oſtenſum ſupra, erit ut *o* B ad N, ſic A B ad O. Sed jam oſtendi B metiri N. Ergo etiam A B metietur O ſe minorem: quod eſt abſurdum.

d *corol. p.* 19. *l.* 7.
e *hyp.*
f 23. *l.* 7.
g 21. *l.* 7.
o 17. *l.* 7.

Si dati A & B non ſunt primi inter ſe, inveni C, D minimos *h* ipſis proportionales. Tum A in D faciat A D, ſeu B in C gignat B C, Dico AD, ſeu BC (æquales *i* enim ſunt) eſt minimus quem, A, B metiuntur. Nam ſi velis A & B metiri O minorem aliquem quàm A D, Eodem diſcurſu, quo ſupra, oſtendam A D metiri O ſe minorem.

A. B
C. D
A D vel B C
O
N. P

h *preced.*
i 19. *l.* 7.

PROPOSITIO XXXVII.

SI duo numeri (A & B) metiantur aliquem numerum (CO,) etiam (F) minimus quem illi (A, & B) metiuntur, eundem (CO) metietur.

Nam

A. B
C——D——O.
F

Nam ſi F non metitur C O, ablatus ex C, O quoties poteſt relinquet D, O ſe minorem. Quoniam *a* verò, tam A, quàm B metiuntur F, F verò metitur, C D, etiam *b* A & B, metientur ipſum C D. Atqui A, B, metiuntur *d* etiam totum C O. Ergo metientur & reliquum *e* D O minorem quàm F : quod evertit hypotheſim.

a *hyp.* b *ax.* 11. d *hyp.* e *ax.* 12.

PROPOSITIO XXXVIII.

D*Atis tribus numeris (A, B, C) invenire minimum numerum, quem metiuntur.*

A. B. C.
P
R
X

Inveni *a* minimum P, quem A & B metiuntur. Si tertius C etiam metiatur P, erit P minimus, quem metiuntur A, B, C. Sit enim (ſi fieri poteſt) alius minor R, quem A, B, C metiantur. Ergo P non eſt minimus quem metiuntur, A B. Quod eſt contra hypotheſim.

a 36. *l.* 7.

Quod ſi C non metiatur P, Inveni *b* R minimum, quem P & C metiuntur. Erit R minimus, quem metiuntur A, B, C. Nam quia A, B, metiuntur P. & P metitur R, etiam A & B metientur *c* R. metitur autem & C ipſum R. Tres igitur A, B, C. metiuntur R. Quod verò R etiam minimus ſit, ſic oſtenditur. Eſto (ſi fieri poteſt) X minor quàm R, quem A, B, C metiantur. Ergo P, minimus, quem metiuntur, A, B, metietur etiam *d* X. ergo cùm C, P, metiantur X (C ex hyp. & P ex jam demonſtratis) minorem quàm R, non erit R. minimus quem C P metiuntur. Quod eſt abſurdum contra conſtructionem.

b *per eand.* c *prac.* d *per eand.*

Corol-

Corollarium.

1. EOdem artificio datis quotcumque numeris invenietur minimus quem illi metiuntur.

2. Si tres numeri A, B, C, (imo quotlibet) aliquem numerum X metiantur, etiam R. minimus quem A, B, C metiuntur, metietur X.

Conſtructis enim iiſdem, quæ ſupra, cùm A, B *e* metiantur R, etiam P *f* metietur X. Et cùm C, P metiantur X. (C ex hypotheſi & R ex jam demonſtratis) etiam R *g* metietur X. Quod erat demonſtrandum.

e hyp.
f 27. l. 7.

PROPOSITIO XXXIX.

SI numerus (A) numerum (B) metiatur per quotientem (C), quotiens erit pars menſi (B) à metiente (A) denominata.

Nam cùm A metiatnr B, per C, etiam C metietur *a* B per A, hoc eſt C toties acceptus quod ſunt unitates in A, facit B, ac proinde C eſt pars ipſius B ab A denominata.

a ax. 9.

A 3 B 24
(C 4

PROPOSITIO XL.

SI numerus (A) partem habuerit quamlibet (B) metietur illum numerus (E) partem denominans.

Quoniam B. eſt pars numeri A denominata ab E, ergo B metitur A per E, Ergo viciſſim E metitur *b* A per B.

b ax. 9.

A 24 B 6
E 4

PRO-

PROPOSITIO XLI.

Numerum reperire minimum, qui partes habeat, à datis numeris (A, B, C) denominatas.

A2 B3 C4 c 38. 7.
G 12
P6 Q4 R3
X

Inveniatur *c* minimus G, quem partium denominatores dati A, B, C metiantur. Aio G eum eſſe qui quæritur.

Metiantur enim A, B, C. ipſum G per quotientes P, Q, R. Igitur P, Q, R. Erunt *d* partes ipſius G, ab A, B, C denominatæ. Quod autem G minimus ſit manifeſtum eſt: ſi enim X minor quàm G, haberet partes à numeris A, B, C denominatas; A, B, C *e* metirentur ipſum X; adeoque G non eſſet minimus quem metirentur, contra hypotheſim.

d 39. 7.
e *præs.*

Corollarium.

Minimus numerus, quem dati quotcunque numeri A, B, C, metiuntur, eſt etiam minimus omnium, habentium partes à datis numeris denominatas.

ELEMENTORUM ARITHMETICÆ LIBER SECUNDUS.

EUCLIDI OCTAVUS.

PROPOSITIO PRIMA.

SI fuerint quotcunque numeri (A, B, C, D) quorum extremi (A, D) ſint primi inter ſe , erunt (A, B, C, D,) omnium ſibi proportionalium minimi.

A. B. C. D.
E. F. G. H.

Sint enim (ſi fieri poteſt) alii E, F, G, H, minores & proportionales ipſis A, B, C, D. Igitur ex
a 22. 5. æquo *a* erit A ad D, ut E ad H. Et quia A & D
b 23. 7. ſunt inter ſe primi, erunt ſibi proportionalium
c 21. 7. *b* minimi, ac proinde metientur *c* ipſos E, H, ſe minores: quod eſt abſurdum.

Apud Euclidem numeri A, B, C, D, ponuntur continuè proportionales, quod non requiri patet ex demonſtratione.

PROPOSITIO II.

NUmeros quot placuerit, in ratione data (A ad B) continuè proportionales minimos reperire.

Sint

Un.			
A 2	B 3		
AA	AB	BB	
4	6	9	
AAA.	AAB.	ABB.	BBB.
8	12	18	27

Sint A, B minimi termini rationis datæ A in A faciat AA. A in B faciat AB. B in B, faciat BB. Erunt AA, AB, BB tres minimi in ratione A ad B.

Quod enim proportionales ſint in ratione A ad B patet ex 17. l. 7. ejuſque ſcholio. Quod minimi, ſic oſtendo. Quia, A B ſunt *a* minimi in ſua proportione, erunt inter ſe *b* primi. Quare etiam eorum quadrati AA, & BB, inter ſe *c* primi erunt: Ergo AA, AB, BB, ſunt tres *d* minimi ſibi proportionalium, hoc eſt in ratione A ad B.

a *hyp.*
b 24. *l* 7.
c 29 *l.* 7.
d *præd.*

Multiplicans deinde A tres jam inventos faciat AAA, AAB, ABB, tum B multiplicans tertium BB, faciat BBB, erunt hi quatuor in ratione A ad B proportionales minimi. Quod ſint proportionales in ratione A ad B patet ex 17. l. 7. ejuſque ſcholio. Quod minimi patet ex 29. lib. 7. & ex præcedentibus.

Nam AAA, BBB ſunt *e* primi inter ſe, ac proinde AAA, AAB, ABB, BBB ſunt quatuor *f* minimi in ſua proportione, quæ eſt A ad B.

e 29. *l.* 7.
f *præc.*

Eodem artificio invenientur minimi quatuor, quinque & deinceps plures in infinitum.

Corollaria.

1. Trium minimorum numerorum (AA, AB, BB) continuè proportionalium, extremi ſunt quadrati: ſi quatuor fuerint, extremi erunt cubi, & ſic deinceps.

2. Numerorum minimorum continuè propor-

tionalium jam inventorum, extremi ſunt primi inter ſe, patet ex eorum geneſi, & ex 29. l. 7.

3. Duo rationis datæ minimi (A, B) metiuntur omnes reliquos infinitos. Cùm enim reliquos omnes gignant A & B, eos quoque metientur, per ax. 7, & corol. p. 16. l. 7.

4. Unitas, A, AA, AAA, ſunt continuè proportionales; ſimiliter & unitas, B, BB, BBB. Nam cùm A multiplicans A fecerit AA, erit ut
g *defin.* 13. *g* unitas ad A, ſic A ad AA: & cùm A multipli-
cans AA, faciat AAA, erit *h* ut unitas ad A
h *per eand.* (hoc jam eſt ut A ad AA) ſic AA ad AAA. Ergo &c.

5. Inter extremos AAA, & BBB cadunt æquè multi medii atque inter ipſos & unitatem, patet ex demonſtratis.

PROPOSITIO III.

SI fuerint quotcunque continuè proportionales (*A*, B, C, D) *minimi eandem cum ipſis rationem habentium, extremi* (*A*, D) *inter ſe primi erunt.*

A. B. C. D.
E. F.
O. P. Q. R.

a 53. 7. Inveniantur *a* duo E, F minimi in ratione A, ad B. Tum per præced. inveniantur O, P, Q, R totidem minimi in ratione E ad F. Quoniam igitur tam O, P, Q, R, quàm A, B, C, D, ſunt minimi in ratione E ad F, & æquè multi, eoſdem utrimque numeros illos eſſe ne-
b *cor.* 2. *præc.* ceſſe eſt. Sed extremi O, R, ſunt inter ſe *b* primi. Ergo etiam A, D inter ſe primi erunt. Quod erat demonſtrandum.

Porro

Digitized by Google

Porro ſeriem proportionalium continuè numerorum minimorum, quorum proinde extremi ſunt inter ſe primi, non poſſe ulteriùs continuari, demonſtrabitur. p. 179

PROPOSITIO IV.

Datis quotcunque rationibus in numeris minimis, eaſdem in minimis etiam numeris continuare.

A ad B.	C ad D	
N.	O.	P.
Q	R.	S

1. Dentur in minimis terminis rationes duæ A ad B & C ad D. Inveni O *c* minimum quem metiuntur B, & C. Tum quoties B metitur O toties A metiatur numerum N, & quoties C metitur O, toties D metiatur P. Dico N, O, P eſſe minimos, qui contineant rationes datas A ad B, & C ad D. *Quod enim continuent* rationes datas, patet ex ipſa eorum geneſi, vi cujus ut A eſt ad N, ſic B eſt, ad O, & ut C eſt ad O, ſic D ad P. Quare permutando ut A ad B ſic N ad O; & ut C ad D, ſic O ad P. Quod minimi ſint ſic oſtendo. Minores enim (ſi fieri poteſt) Q, R, S, continuent rationes datas. Quoniam igitur ut A eſt ad B, ſic Q ad R, ſuntque A, B in ratione ſua minimi, liquet *d* A, B, metiri ipſos Q, R. Eandem ob cauſam C, D metientur R, S. Quoniam ergo ambo B, C metiuntur R, etiam O minimus quem metiuntur B, C, ipſum R *e* metietur, major minorem. Quod eſt abſurdum.

c 36. 7.
d 21. 7.
e 37. 7.

A ad B.	C ad D.	E ad F.	
N.	O.	P.	Q
R.	S.	T.	V.

2. Dentur in minimis terminis rationes tres A ad B: C ad D; E ad F. Inveni O minimum, quem metiuntur B, & C; & quoties B, C metiuntur O, toties A, D metiantur numeros

meros N, P. Si tum etiam E metitur P, toties F metiatur Q. Dico N, O, P, Q. eſſe minimos, qui tres rationes datas continuant.

Quod enim N ſit ad O ut A ad B; & O ad P. ut C ad D; & P ad Q ut E ad F ex ipſa conſtructione patet. Quod minimi ſint ſic oſtendo. Continuent minores alii R, S, T, V (ſi fieri poteſt) rationes datas. Oſtendam ut ſupra majorem O metiri minorem S. Quod eſt abſurdum.

Si verò E non metiatur P, inveniatur S minimus, quem P & E metiuntur; & quoties P metitur S, toties, O, N, metiantur numeros R, Q: item quoties E metitur S, toties F metiatur T. Dico Q, R, S, T eſſe minimos, qui tres rationes datas continuant.

A ad B. C ad D. E ad F.
N. O. P.
Q. R. S T.
V— X— Y— Z—

Nam ex conſtructione patet S eſſe ad T, ut E ad F; item Q R, S proportionales eſſe ipſis N, O, P. ſed N, O, P continuant (ut oſtenſum ſupra) rationes A ad B, & C ad D. Ergo etiam Q,R,S,eaſdem continuant: ac proinde,cùm etiam ſit ut E ad F, ſic S ad T, patet Q R, S, T continuare tres rationes A ad B, C ad D, E ad F. Quod autem Q. R, S, T minimi ſint ſic oſtendo. Continuent (ſi fieri poteſt) tres rationes datas minores alii, V, X, Y Z. Quoniam igitur A eſt
o hyp ad B, ut V ad X, ſuntque A, B minimi *o* in ra-
f 21. 7. tione ſua; B *f* metietur X. Eodem modo oſten-
n 37. 7. dam etiam C metiri X. Ergo *n* etiam O minimus quem metiuntur B ac C, metietur ipſum X. Jam quia ponitur X eſſe ad Y, ut C eſt ad D; hoc eſt ut O ad P,etiam permutando X erit ad O,ut Y ad P. Cùm

P. Cùm ergo O metiatur X, etiam P metietur Y. Sed etiam E metietur Y, (cùm E, F ſint in ratione *g* ſua minimi, & velis ut E ad F, ſic Y eſſe ad Z.) Ergo etiam S minimus, quem E & P metiuntur, metietur Y, minor majorem. Quod eſt abſurdum. g *hyp.*

Eodem artificio in minimis terminis continuabuntur rationes quatuor, & plures deinceps in infinitum.

PROPOSITIO V.

Plani numeri (AB, CD) rationem inter ſe habent compoſitam ex laterum rationibus.

Nimirum ex rationibus A ad C, & B ad D, vel rationibus A ad D, & B ad C.

B multiplicans C faciat BC. Ratio AB ad CD compoſita eſt ex rationibus AB ad AC, & BC ad CD, ut demonſtravi in Elem. Geom. l. 5. parte 3. n. 12. Sed ratio AB ad BC, eſt *a* eadem cum ratione A ad C, & ratio BC ad CD, eadem *b* eſt cum ratione B ad D. Ergo etiam ratio AB ad CD compoſita eſt ex rationibus laterum A ad C, & B ad D. Quod erat demonſtrandum. a 17. 7. b *ibid.*

AB CD
BC

PROPOSITIO VI.

Si numerorum continuè proportionalium (A, B, C, D, E) primus (A) ſecundum (B) non metiatur, neque ullus ullum metietur.

A. B. C. D. E.
N. O. P.

Quod nullus metiatur proximè inſequentem patet ex ipſa hypotheſi. Quod verò nec ullus ullum metiatur, ſic oſtendo. Tribus A, B, C

a 35. 7. inveniantur *a* proportionales minimi N, O, P. Erunt ergo N, P primi inter ſe, eritque ex *e* æquo ut A ad C, ſic N ad P. Quia verò A eſt ad B, ut N ad O; & A non metitur B; neque N metietur O, ac proinde N non eſt unitas. Quare cùm N, P ſint primi inter ſe, N non *b* metietur P. Atqui A eſt ad C ut N ad P. Ergo neque A metitur C. Eodem modo oſtendam neque B metiri tertium à ſe numerum D, neque C à ſe tertium E. Et ſi quatuor ſumantur minimi proportionales datis, A, B, C, D, ſimili viâ demonſtrabitur neque A metiri quartum D, neque B à ſe quartum E, & ſic deinceps.

e 22. 5.

b def. 22.

A. B. C. D. E.
N. O. P.

PROPOSITIO VII.

SI numerorum continuè proportionalium (A, B, C, D, E) aliquis quempiam alium à ſecundo (B) metiatur, etiam primus (A) ſecundum (B) metietur.

Nam ſi A non metiatur B; nequè ullus ullum ex ſequentibus *c* metietur; Quod evertit hypotheſim.

c præc.

PROPOSITIO VIII.

SI quatuor numeri in eadem fuerint proportione (ut A ad B, ſic C ad D) quot inter duos primos (A, & B) exiſtunt proportionales medii, totidem inter poſteriores duos (C ad D) exiſtent.

In-

A. P. Q. B. Inter A, B cadant medii P, Q.
N. O. R. S. Numeris A, P, Q, B inveni *a* pro- a 35.7.
C. V. X. D. portionales minimos N, O, R, S.

Igitur ex æquo *o* erit ut N ad S, o 22. 5.
ſic A ad B, hoc eſt C ad D. Sunt autem N, S b 3.8.
b primi inter ſe ac proinde in ſua *c* proportione c 22.7. d 21.7.
minimi. Ergo N, S æquè metiuntur *d* ſibi proportionales, C, D. Toties O & R metiantur alios V, X. Quoniam igitur N, O, R, S, æquè metiuntur ipſos C, V, X, D, patet C, V, X, D, eſſe pro- e *hyp.*
portionales ipſis N, O, R, S, hoc eſt datis *e* A, P, f *hyp.*
Q, B. Quare cùm A, P, Q, B, ſint *f* continuè proportionales, etiam C, V, X, D totidem continuè proportionales erunt ac proinde inter A, B, & inter C, D, æquè multi exiſtunt medii proportionales: quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO IX.

SI duo numeri (C, & D) *primi inter ſe fuerint, quot inter ipſos exiſtunt medii proportionales, totidem & inter eorum ſingulos ac unitatem exiſtent.*

C.	O.	P.	D.
	1		
	Unitas		
A.		B.	
AA.	AB.	BB.	
AAA.	AAB.	ABB.	BBB.

Inter C ac D exiſtant medii proportionales O, P. Inveni a 2.8.
a duos A, B, minimos in ratione C ad D: deinde tres AA, AB, BB: demum quatuor, AAA. AAB, ABB, BBB, donec inventorum multitudo par ſit multitudini datorum, C, O, P, D. Quoniam ergo extremi C, D, ſunt *b* primi b *hyp.*

 inter

C.	O.	P.	D.
	1		
	Unitas		
A.		B.	
AA.	AB.	BB	
AAA.	AAB.	ABB.	BBB.

c 23.7. *d hyp.* *e ex conſt.*

inter ſe, erunt C, O, P, D *c* minimi ſibi proportionalium, hoc eſt minimi in *d* ratione A ad B. Quare cùm, AAA AAB, ABB. BBB ſint etiam *e* minimi in ratione A ad B, erunt hi illis æquales, ſinguli ſingulis. Deinde ex prop. 2. hujus & defin. 13. patet unitatem & A, AA, AAA itemque unitatem & B, BB, BBB eſſe continuè proportionales. Quare cùm tam multitudo AAA, AA, A, quàm BBB, BB. B, cum unitate par ſit multitudini AAA, AAB, ABB, BBB hoc eſt C, O, P D, quot medii cadent inter C & D, totidem cadent inter unitatem & AAA, ſive, C, itemque inter unitatem & BBB, ſive D. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO X.

SI inter unitatem & duos numeros (AAA ac BBB) æque multi medii proportionales exiſtant, etiam inter ipſos (AAA, & BBB) æquè multi exiſtent medii.

Inſtituatur tota conſtructio propoſitionis. 2. hujus, eritque manifeſta demonſtratio ex corollario 4. & 5. propoſitionis ejuſdem.

Corollarium.

8. Si fuerint duo ordines ab unitate continuè

tinuè proportionalium 1, A, AA, AAA, &c. 1, B, BB. BBB, &c. Erit proportio AA ad BB duplicata rationis A	unit.			
	1.			
	A.		B.	
	AA.	AB.	BB.	
	AAA.	AAB.	ABB.	BBB.

ad B, & ratio AAA ad BBB triplicata rationis A ad B & ſic deinceps. a *ſchol. p.* 17. 7.

Nam cùm AA, AB, BB ſint continuè *a* proportionales in ratione A ad B, Ergo ratio AA ad BB eſt duplicata *b* rationis AA ad AB, hoc eſt A ad B. Similiter cùm AAA, AAB, ABB, BBB, ſint continuè *c* proportionales in ratione A ad B, erit ratio AAA ad BBB triplicata *d* rationis AAA ad AAB, hoc eſt rationis A, ad B, Et ſic deinceps. Quod erat demonſtrandum. b *def.* 12. c *ſcho.* 17. 7. d *def.* 12.

2. Verum eſt corollarium primum, à quocunque communi numero (C) inchoentur ſeries.

Cùm enim ſint in proportione continua A, B, C, item A, E, F, erit CA *a* par BB, & FA, par EE. Sed ratio BB ad EE eſt duplicata rationis B ad E, per		A		
	B.		E.	
	C.	O.	F.	
	D.	P.	Q.	G.

a 20. 7.

11, quæ ab hac non dependet. Ergo etiam ratio CA ad FA (hoc eſt ratio *b* C ad F) duplicata eſt rationis B ad E. quod erat primum. Pari modo oſtendam, quod ratio DB ad GE ſit duplicata rationis C ad F, ac proinde quadruplicata rationis B ad E. Sed ratio DB ad GE, componitur ex rationibus D ad G & B ad E, Ergo ratio D ad G cum ratione B ad E eſt quadruplicata rationis B ad E. Ergo ſola ratio D ad G eſt triplicata rationis B ad E: quod erat alterum. b *ſchol p.* 17. 7.

3. Si inter numerum A & duos D, G æquè mul-

multi cadant medii proportionales B, C, E, F, etiam inter ipſos, D, G, (licèt alteruter ſit unitas) æque multi medii cadent.

c deſ. 12. Patet ex corollario 2. cùm enim ratio DG ſit triplicata rationis B ad E, inter D & G cadent duo *c* medii proportionales in ratione B ad E.

PROPOSITIO XI.

Inter duos quadratos numeros (AA, BB) unus cadit medius proportionalis (AB) & proportio quadrati numeri ad quadratum numerum duplicata eſt proportionis laterum (A, B.)

AA. AB. BB.
A. B.

a ſchol. 17. 7. Pars 1. AA eſt ad AB *a* ut A ad B, & AB eſt ad BB ut A ad
o 11. 5. B. Ergo *o* AA eſt ad AB, ut
b def. 12. AB ad BB. Quod erat primum.
c ſcho. 17. 7. Pars 2. patet ex 1 parte rationem AA ad BB eſſe duplicatam *b* rationis AA ad AB: hoc eſt *c* rationis A ad B.

Scholium.

Ex hac & 8 præcedente demonſtrari poteſt theorema illud celeberrimum, quod Euclidi eſt libri 10 *poſtremum*: In quadrato *diameter lateri incommenſurabilis eſt.*

Si enim id negatur, erit diameter ad latus, ut nume-
a. b. *rus ad numerum, puta ut* a *ad* b, *ut patet ex definitio-*
aa. bb. *ne commenſurabilium. Ergo etiam (ut patet ex* 22. *l.* 6.) *quadratum diametri eſt quadratum lateris, ut*

qua-

quadratus numerus aa *ad quadratum numerum* bb; *quod fieri non poteſt; cùm enim (ut patet ex 47. l. 1) quadratum diametri ſit ad quadratum lateris ut 2 ad 1, ſi illud ad hoc eſſet ut quadratus numerus* aa *ad quadratum numerum* bb, *etiam* aa *eſſet ad* bb, *ut 2 ad 1. ac proinde cùm inter* aa, *&* bb *per hanc propoſitionem cadat unus medius integer, etiam inter 2 & 1, caderet medius integer unus, per* 8. *Quod eſt abſurdum.*

PROPOSITIO XII.

INter duos cubos numeros (AAA, & BBB) duo cadunt medii proportionales (AAB, ABB:) & cubi ad cubum proportio eſt triplicata proportionis laterum (A, B.)

AAA. AAB. ABB. BBB.
A. B.

Per ſcholium p. 17. l. 7. AAA, AAB, ABB, BBB. ſunt continuè proportionales in ratione A ad B, quod erat primum; ex quo & definitione 12. patet etiam ſecundum.

PROPOSITIO XIII.

DEntur numeri continuè proportionales quotcunque A, B, C, qui in ſeipſos ducti faciant AA, BB, CC; & in hos rurſum ducti faciant AAA, BBB, CCC. Atque ita deinceps in infinitum.

Erunt AA, BB, CC, item AAA, BBB, CCC, & ſic deinceps continuè proportionales.

Per

1. 1. 1. Per coroll. 4. p. 2. hujus
A B. C. tres ſeries hîc ab unitate
AA. BB. CC. incipientes ſunt conti-
AAA. BBB. CCC. nuè proportionales. Ergo
a *corol. p.* 10. 8. ratio AA ad BB *a* eſt du-
b *hyp.* plicata rationis A ad B, hoc eſt *b* rationis B ad
c *corol. p.* 10. 8. C. Sed etiam ratio BB ad CC duplicata *c* eſt
rationis B ad C. Ergo *d* AA eſt ad BB ut BB ad
d 34. *5.* CC. Similiter quia ratio AAA ad BBB eſt tri-
e *cor. p.* 10. 7. plicata *e* rationis A ad B; hoc eſt *f* B ad C, cujus
f *hyp.* etiam triplicata *g* eſt ratio BBB ad CCC, erit
g *cor. p.* 10. 7. quoque *h* AAA ad BBB ut BBB ad CCC. Quod
h 34. *5.* erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIV.

SI quadratus numerus (AA) quadratum numerum (BB) metiatur, etiam (A) latus unius metietur (B) latus alterius.

Et ſi latus (A) metiatur latus (B,) etiam quadratus quadratum metietur.

AA. AB. BB. Pars 1. A in B faciat AB. Per
A. B. ſchol. p. 17. l. 7. AA. AB, BB,
ſunt proportionales in ratione
a *hyp.* A ad B. Quare cùm *a* AA metiatur BB, etiam
b 7. 8. *b* AA metietur AB. Sed ut AA eſt ad AB *c* ſic
c *ſchol. p.* 17. 7. A eſt ad B. Ergo etiam *d* A metitur B: quod
d *ax.* 11. erat primum.
e *ſchol. p.* 17. 7. Pars 2. Ut A eſt ad B ſic *e* AA eſt ad AB. Sed
A jam ponitur metiri B ergo etiam AA meti-
f *ibid.* tur AB. Rurſum quia ut A ad B *f* ſic AB eſt ad
g *hyp.* BB, metiturque *g* A ipſum B, etiam AB metie-
h *ax.* 11. tur *h* BB. Ergo AA metietur quoque BB Quod
erat alterum. PRO-

PROPOSITIO XV.

SI *cubus numerus* (*AAA*) *cubum numerum* BBB *metiatur* , *etiam latus* (*A*) *metietur latus* (*B* :) *Et è converſo.*

Pars 1. Inter utrumque cubum interpone numeros AAB, ABB, quorum geneſim litteræ ſatis indicant. Erunt omnes quatuor *a* continuè proportionales in ratione A ad B. Quare cùm AAA metiatur BBB *p* etiam AAA *o* metitur AAB. Sed AAA eſt ad AAB *q* ut A ad B. Ergo etiam A metitur B; quod erat primum.

AAA. AAB. ABB. BBB.
A. B.

a *ſchol.* 17. 7.
p *hyp.*
o 7. 8.
q *ſchol.* 17. 7.

Pars 2. Quia AAA eſt ad AAB ut *b* A ad B, poniturque jam A metiri B, etiam AAA metietur AAB. Pari modo quia AAB, ABB, BBB ſunt *c* inter ſe ut A ad B, etiam AAB metietur ABB, & ABB ipſum BBB. Ergo etiam *d* AAA metitur BBB Quod erat alterum.

b *ibid.*
c *ibid.*
d *ax.* 1.

PROPOSITIO XVI.

SI *quadratus* (*AA*) *quadratum* (BB) *non metiatur* , *neque latus* (*A*) *metietur latus* (*B*) *Et è converſo.*

Pars 1. nam ſi latus A tunc metiatur latus B, etiam AA *a* metiretur BB contra hypotheſim.

AA. BB
A. B.

a 2. *par.* *p.* 13. 8.

Pars 2. Si latere A non metiente B, metiatur AA ipſum BB, ſequeretur etiam *b* A metiri B, contra hypotheſim.

b 1. *par. ejuſd.*

PRO-

PROPOSITIO XVII.

SI cubus (AAA) cubum (DDD) non metiatur; neque latus (A) metietur latus (D.) Et è converſo.

Demonſtratur ab abſurdo per 15.

PROPOSITIO XVIII.

INter duos planos ſimiles (AB, CD) unus medius proportionalis eſt numerus: & plani ad planum ratio duplicata eſt rationis homologorum laterum (A, C)

AB.	BC.	CD.	
A.	B.	C.	D.

Pars 1. Quoniam AB, CD
a defin. 27. ſimiles plani ſunt, erit latus *a*
b 16. 5. A ad latus B, ut latus C ad
c ſchol. p. 17. 7. latus D, & permutando A ad C *b* ut B ad D. Cùm
d ibid. igitur AB ſit ad BC, *c* ut A ad C; hoc eſt (quod jam oſtendi) ut B ad D; hoc eſt *d* ut BC ad CD; erit BC medius proportionalis inter AB. CD. Quod erat primum.

Pars 2. per 1. partem Ratio AB ad CD, eſt dupli-
e defin. cata *e* rationis AB ad BC; hoc eſt *f* rationis A ad
f ſchol. p. 17. 7. C. Quod erat alterum.

PROPOSITIO XIX.

INter duos ſimiles ſolidos (ABC, DEF) duo cadunt medii proportionales (BCD, CDE) & ratio ſolidi ad ſolidum eſt triplicata rationis laterum homologorum (A ad D.)

Pars 1.

Digitized by Google

ABC. BCD. CDE. DEF.
A. B. C. D. E. F.

Pars 1. quia ſimiles ſolidi ſunt ABC, & DEF, erunt unius latera A. B. C. proportionalia alterius lateribus D. E F. Quare permutando A eſt ad D, ut B ad E, & C ad F. Jam per ſcholium p. 17. l. 7. eſt

ABC ad BCD ut A. ad D.	BCD ad CDE ut B. ad E.	CDE ad DEF ut C ad F.

Sed jam oſtendi A eſſe ad D, ut B eſt ad E, & ut C eſt ad F. Ergo etiam ABC eſt ad BCD, ut BCD ad CDE. & CDE ad DEF; ac proinde BCD, CDE, ſunt duo medii proportionales inter ABC, & DEF. Quod erat demonſtrandum.

Pars 2. Jam patet ex 1. parte & definitione 12. rationem ABC ad DEF eſſe triplicatam rationis ABC ad BCD, hoc eſt *a* rationis A ad D. Quod erat demonſtrandum. a *ſchol.* 17. 7.

Scholium.

Videtur hic locus exigere, quando ſolidus numerus ex trium numerorum multiplicatione producitur, ut demonſtremus ex tribus, imò quotlibet numeris, quocunque inter ſe ordine multiplicatis eundem ſemper numerum produci. Inſigne theorema eſt & usûs permagni, quòd aliâ quâdam viâ longèque expeditiori, quàm alii paſſim ſoleant, demonſtrabimus. Sed quoniam ea pendet à permutationibus, quas datus rerum numerus ſubire poteſt, ſit

Theorema 1.

Datæ ſint res, ſeu litteræ, quotcunque A, B, C, D, E, & ponantur totidem numeri ab unitate 1, 2, 3, 4, 5 *Hi inter ſe ordinatim multiplicati producent numerum permutationum, quas res datæ A, B, C, D, E, ſubire poſſunt.*

Theorematis hujus demonſtrationem me audiſſe memini R. P. Ignatium Derkennis pulcherrimè deducentem, ex ſimplici duarum unitatum permutatione. Illius, dum hæc ſcribo, in lucem prodit opus Theologicum de Deo uno, trino, creatore, conſcriptum methodo planè eximiâ, longiſſimèque diversâ ab eâ, quam de ſimili ſcribentes argumento, hactenus tenuerunt: In quo iſtud etiam lector clarè perſpiciet, non ſolùm Theologiæ Philoſophiam ubique ancillari; ſed, quod non perinde fortaſſis ſibi homines perſuaſerint, etiam à Mathematicis ratiociniis quantùm ſubinde ad ſublimes de Deo diviniſque rebus quæſtiones enodandas poſſit lucis affundi. Ita porrò, quod ſuprà propoſui, deducebat.

Duæ litteræ (has enim pro rebus aſſumemus) a, b, *poſſunt bis permutari, quâlibet ſemel ultimum locum vel primum occupante. Hinc*

Tres litteræ a, b, c *permutari poſſunt ſexies, nam quâlibet trium ſemel occupante ultimum locum; poſſunt duæ reliquæ bis permutari. Cùm enim* c *tenet ultimum locum, poſſunt duæ reliquæ* a b, *bis permutari ac proinde duo habentur diverſi ordines* a b c, b a c. *Rurſus* b *occupante ultimum locum, bis permutari poſſunt reliquæ* a, c, *& ſic duo novi exſurgunt ordines* a c b, c a b. *Denique,* a, *ultimum tenente locum, reliqua* b, c *bis permutari poſſunt: undè rurſus duo alii exiſtunt ordines* b c a, c b a. *En ſimul omnes.*

abc acb bca
bac cab cba.

Quatuor litteræ a, b, c, d, *permutationes admittunt* 24. *Nam qualibet ex* 4 *datis litteris ſemel occupare poteſt locum ultimum, ac tum reliquæ tres ſexies permutari. Undè* 24. *diverſi ordines quatuor litterarum exiſtunt.*

Quin-

Quinque a, b, c, d, e, *permutationes ſubire poſſunt* 120. *Quâlibet enim ex* 5 *datis ultimum tenente locum, reliqua* 4 *vicibus* 24 *permutantur, undè litterarum* 5, *quinquies exiſtunt* 24 *diverſi ordines, hoc eſt* 120. *Atque ita in infinitum. Hoc premiſſo ſit*

Theorema 2.

Pars. 1. *Tres numeri A, B, C quocunque inter ſe ordine multiplicati, ſemper æquales gignunt numeros.*

Sex diverſos multiplicationum ordines exhibet tabella appoſita. Quod producta ſint æqualia cùm eadem littera ultimum locum tenet. ut in a B c & b a c *&c. patet ex* 16. *l.* 7. *Reſtat igitur ut oſtendam producta* a B c, a C b, b C a, *æqualia eſſe*

a B c
b a c
a C b
c a b
b C a
c b a

a B c
a C b *Comparemus primum* a B c *&* a C b. a B *eſt ad* a a C, *ut* B *ad* C. *Sed* B *&* C *ſunt iidem numeri, qui* b *&* c. *Ergo* a B *eſt ad* a C, *ut* b *ad* c. *Ergo* b *productum ex primo* a B *in quartum* c (*hoc eſt* a B c) *æquatur producto ſecundo* a C *in* b *tertium* (*hoc eſt ipſi* a C b.) *Comparemus etiam* a B c *&* b C A. a B *eſt ad* b C *ut* a *ad* C; *hoc eſt ut* A *ad* c. *Ergo productum* a B c *æquatur producto* b C A. *Liquet igitur omnia ſex producta inter ſe æqualia eſſe.*

a *ſchol.* 17. 7.
b 19. 7.

a B c
b C A *ſchol. p.* 17. 7. 19. 7.

Pars 2. *Etiam* 4 *numeri* a, b, c, d, *quocumque inter ſe ordine multiplicati, æquales gignent numeros.*

Ex theor. patet a, b, c, d *admittere* 4 *ſenarios diverſorum ordinum, hoc eſt ordines diverſos* 24. *Senarius primus exhibetur in tabella appoſita. Quoniã* a, b, c *quocunque inter ſe ordine multiplicati ſemper eundem gignunt numerum per.* 1. *partem & ultimus in toto ſenario eſt idem,*

a b c d
b a c d
a c b d
c a b d

 pa-

patet omnia primi ſenarii producta eſſe unum idemque. Eodem modo oſtendam ſex producta ſecundi ſenarii inter ſe convenire.   b c a d
c b a d

Atque id ipſum de ſenario tertio quartoque demonſtrabimus. Hoc igitur ſolùm reſtat, ut productum unius ſenarii conveniat cum producto cujuſlibet ſenariorum trium reliquorum. Quod ſic oſtendo.

Comparemus ſenarium primum, in quo d tenet locum ultimum, cum ſenario quarto, in quo a locum poſtremum occupat. Scribe a infra d. Tum ante d pone A, & D

c ſchol. 17. 7. b c A d ante, a, & reliquas præfige utrique litteras
e 19 7. b c D a b c. Igitur b c A eſt ad b c D, c ut A ad D; hoc eſt a ad d. Ergo producta e b c A d, & b c D a ſenarii primi & quarti æqualia ſunt. Pari modo oſtendam omnium 4 ſenariorum convenire producta. Liquet ergo propoſitum.

Pars 3. Eodem diſcurſu ex parte 2 oſtendam producta ex multiplicatione 5 numerorum, quæ ſunt 120, eſſe eadem, atque ita in infinitum, in numeris 6. 7. 8. &c.

PROPOSITIO XX.

SI inter duos planos (A & B) cadat unus medius proportionalis (C) ſimiles plani erunt.

A. C. B. Sumantur F, K, *a* minimi in ratione
a 35. 7 F. K A ad C & C ad B. Ergo *b* F, K æque
b 21. 7. X. Z. metiuntur tam ipſos A, C puta per X; quàm ipſos C B, puta per Z.

c ax. 8. Igitur K in X & Z *c* facit C, B, ac proinde ut X
d 17. 7. eſt ad Z, *d* ſic C eſt ad B, hoc eſt F, ad K: &
permutando F ad X, ut K ad Z. Quare cùm *e* F in
e hyp & X faciat A, & K in Z faciat B, ac proinde F, X, &
ax. 8. K, Z, ſint latera planorum A & B, ſimiles *f* plani
f deſin. 27. erunt A, B. Quod erat demonſtrandum.

PAU

PAULO ALITER.

SI inter duos numeros (A, B) unus cadat medius proportionalis (C) ſimiles plani erunt.

A	C.	B.
D		E
M.		N
DM.	EM.	EN.

Sumantur *a* D, E minimi in ratione A ad C, & C ad B. Igitur D, E æquè *b* metiuntur tam A, C, puta per M, quàm C, B, puta per N. Quare DM (productum nempe ex D in M) eſt *c* A; & EM *d* eſt C; & *e* EN eſt B. Jam in DM & EM latus D eſt ad latus E, ut *f* DM ad EM; hoc eſt ut A ad C; hoc eſt ut *g* C ad B; hoc eſt ut EM ad EN; hoc eſt ut *h* latus M ad latus N. Ergo DM, EN hoc eſt A, B, ſunt plani *i* ſimiles. Quod erat demonſtrandum.

a 35. 7.
b 21. 7.
c *ax.* 8.
d *idem.*
e *idem.*
f *ſchol. p.* 17. 7.
g *hyp.*
h *ſchol. p.* 17. 7.
i *def.* 27.

PROPOSITIO XXI.

SI inter duos numeros (A, B) duo medii proportionales exiſtant numeri (C, D) ſimiles ſolidi erunt (A, B.)

A.	C.	D.	B.
EP	X.		OQ.
	M	N	
EPM.	XM.	XN.	OQN.

Sumantur *a* datis A, C, D, tres minimi proportionales, EP, X OQ, qui æquè *b* metientur ipſos A, C, D, puta per M; ac proinde EPM (productum nempe ex EP in M) *c* eſt A, & XM *d* eſt C. Quia autem C, D, B ſunt in eadem ratione, in qua A, C, D, erunt EP, X, OQ etiam minimi propor-

a 35. 7.
b *corol. p.* 21. 7.
c *ax.* 8.
d *idem.*

 tio-

A. C. D.
EP X. OQ
M. N.
EPM. XM, XN OQ

e *corol.* p. 21.7. tionales ipſis C, D, B, eoſque proinde *e* metiuntur equè, puta per N. Quare XN (productum nempe ex X f *ax.* 8. in N) eſt *f* D, & OQN eſt B. Cùm igitur EPM A, & OQN ſit B, reliquum eſt ut oſtendatur la ra E, P, M, eſſe proportionalia lateribus O, Q,

g *conſt.* h *prae.* i *def.* 27. k *ſchol.* p 17. 7. l *conſt.* m *def.* 2. n 18. 8. o 11. 12. p *def.* 27.

Quoniam inter EP, & OQ *g* eſt med prop. X, erunt EP, OQ *h* plani ſimiles; id que *i* E eſt ad O, ut P ad Q. Deinde M eſt ad ut *k* XM ad XN; hoc eſt (ut jam oſtendi ſu ut C ad D; hoc eſt ut *l* EP ad X. Sed EP eſt X, ut latus P ad latus Q. Quia tam *m* EP ad quàm *n* P, ad Q eſt in ratione dimidiata EP OQ. Ergo *o* ut P ad Q (hoc eſt ut E ad O) ſic ad N. Similes igitur *p* ſolidi ſunt EPM, OQ hoc eſt A, B. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXII.

SI *trium proportionalium numerorum* (A, B, C) *primus* (A) *ſit quadratus; ter etiam quadratus erit.*

A. B. C.
O P
1

Radix ſive latus quadrati A eſt O. Quoniam igitur O multipli cans ſe facit A, erit ut unitas (1) a *def.* 13. ad O, ſic *a* O ad A: ac proinde ta inter A & 1, quàm inter A & C unus eſt medi b *color.* 3. 10 8. proportionalis. Ergo etiam *b* inter 1 & C unus c det medius P; qui proinde ductus in ſe *c* facit C c *patet ex def.* 13. Ergo etiam C quadratus *d* eſt. Quod erat demon d *defin.* 28.

Corollarium.

QUadratus, radix, unitas ſunt continuè propor tionales. Patet ex demonſt.

PRO

PROPOSITIO XXIII.

SI quatuor continuè proportionalium numerorum (A, B, C, D) primus (A) ſit cubus, quartus etiam cubus erit.

A B. C. D.
P R
O Q
1.

Cubi A latus eſto O. O, in ſe faciat P. Igitur O in P *a* facit cubum A. Jam per coroll. præc. 1 eſt ad O ut O ad P. Et quia O in P fecit A, erit ut, 1, ad O (hoc eſt ut O ad P) ſic *b* P ad A. Ergo tam inter A &, 1, quàm inter A & D cadunt duo medii proportionales. Ergo etiam inter 1 & D duo medii *c* cadent Q R. Cùm ergo ſit ut 1 ad Q ſic Q ad R, patet *d* Q in ſe facere R. Et cùm ſit ut 1 ad Q ſic R ad D, patet *e* Q in R facere D. Ergo *f* etiam D cubus eſt.

a *defin.* 29
b *defin.* 13.
c *color.* 3. 10. 8.
d *defin.* 13.
e *ex ead.*
f *defin.* 29.

Corollarium.

UNitas, radix, quadratum, cubus, ſunt continuè proportionalia. Patet ex demonſtratis.

PROPOSITIO XXIV.

SI duo numeri (A, B) eam inter ſe rationem habeant, quam quadratus aliquis (C) ad quadratum (D;) primus autem (A) ſit quadratus; etiam ſecundus (B) quadratus erit.

A. O. B.
C. P. D.

Quoniam, A eſt ad B, ut C ad D; & inter C & D, unus cadit medius *a* proportionalis P, etiam inter *b* A & B unus cadet, O. quia igitur primus A quadratus eſt, etiam tertius *c* B quadratus erit. Quod erat demonſtrandum.

a 11. 8.
b 8. *l.* 8.
c 22. 8.

PROPOSITIO XXV.

SI duo numeri (A, B) eam inter ſe rationem habeant quam cubus (C) ad cubum (D;) primus autem (A) ſit cubus, etiam ſecundus (B) cubus erit.

A. O. P. B.
C. Q. R. D.

a 12. 8. Quia A eſt ad B, ut C ad D, atque inter cubos *a* C, D, duo cadunt medii proportionales Q,
b 8. 8. R, etiam inter A, B duo *b* medii cadent. Quo-
c 23. 8. niam ergo A cubus eſt; etiam B, cubus *c* erit: Quod erat demonſtrandum.

Corollaria.

1. RAtio quadrati numeri ad non quadratum nequit exprimi in duobus quadratis. Patet ex 24.

2. Ratio cubi ad non cubum, nequit exhiberi in duobus cubis. Patet ex 25.

PROPOSITIO XXVI.

SImiles plani (A, B) eam inter ſe rationem habent quam quadratus aliquis ad quadratum.

A. C. B.
D. E. F.

a 18. 8. Inter A, & B cadit unus *a* medius proportionalis, qui eſto C. In ratione A ad C, ſeu C ad B accipiantur tres
b *cor.* 1 *p.* 2. *l.* 8. minimi D, E, F. Extremi D, F, erunt *b* quadrati.
c *conſtr.* Quoniam ergo A eſt ad C ut *c* D ad E, & C ad B
d *conſtr.* *d* ut E ad F; erit ex æquo *e* A ad B, ut quadratus
e 22. 7. D ad quadratum F. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO XXVII.

Similes ſolidi (A, B) eam inter ſe rationem habent quam aliquis cubus ad cubum.

A. C. D. B.
E. G. H. F.

Inter A & B, duo *a* cadunt medii proportionales, qui ſint, C, D. In ratione A ad C, capiantur quatuor minimi E, G, H, F. Extremi E & F erunt *b* cubi; eritque ex æquo A ad B; ut E cubus ad cubum F. Quod erat demonſtrandum.

a 19. 8.

b *corol.* 1. *p.* 2.

E L E-

ELEMENTORUM ARITHMETICÆ LIBER TERTIUS.

EUCLIDI VERO NONUS.

PROPOSITIO I.

D*Vo ſimiles plani (A, B) ſe mutuo multiplicantes quadratum producunt.* (*AB*)

A. O. B. A in ſe faciat AA. Erit igitur
a ſchol. p. 17. 7. AA ad AB, ut *a* A ad B. Sed in-
AA. P. AB. ter *b* A & B cadit unus medius
b 18. 8. proportionalis cùm ſint A & B
c 8. 8. plani ſimiles. Ergo etiam inter *c* AA & AB, medius cadet P. Quare cùm primus AA ſit quadratus per conſtructionem, etiam tertius AB qua-
d 22. 8. dratus *d* erit: quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO II.

S*I duo numeri (A, B) ſe invicem multiplicantes quadratum gignant (AB;) ſimiles plani erunt.*

A. O. B. A in ſe ſit A A. Quoniam A A,
AA. P. AB. A B ambo quadrati ſunt, cadet
a 11. 8. inter *a* eos medius proportionalis,
ſed

ſed AA eſt ad AB, ut *b* A ad B. Ergo etiam inter A, & B *c* cadet medius proportionalis. Ergo A, B ſunt *d* plani ſimiles. Quod erat demonſtrandum. b *ſchol.* 7. 7. c 8. 8. d 20. 8.

Corollaria.

1. DUo quadrati quadratum producunt. Sunt enim ſimiles plani. Ergo per. 1. hujus.

2. Si duo numeri A, B quadratum producunt, & alter eorum (puta A) ſit quadratus, etiam B quadratus erit.

Nam per 2. A & B ſunt plani ſimiles. Ergo inter *a* A, B cadit medius proportionalis. Cùm ergo A primus ſit quadratus, etiam tertius B *b* erit. a 18. 8. b 22. 8.

3. Si duo numeri A, & B, producant non quadratum, A verò ſit quadratus, B quadratus non erit.

Nam ſi etiam B, quadratus eſſet duo A, & B per corollarium 1. producerent quadratum, contra hypotheſim.

4. Quadratus A & non quadratus B, producunt non quadratum. Aliàs per corollarium 2. etiam B quadratus foret, contra hypoteſim.

PROPOSITIO III.

CVbus numerus (CCC) *ſeipſum multiplicans, facit cubum* (D)

CCC	Cubi radix ſeu latus eſto, C. Per corollarium p. 23. l. 8. 1, C, CC, CCC,
CC	ſunt continuè proportionales, adeo-
C	que inter 1, & CCC cadunt duo me-
D 1	dii proportionales. Sed, quia CCC in

ſeipſum fecit D, erit *a* ut 1 ad CCC, ita CCC ad D. Er- a *defin.* 13.

b 8. 8. D. Ergo etiam *b* inter CCC & D cadunt duo medii. Quare cùm primus CCC ſit cubus, etiam
c 23. 8. quartus D cubus *c* erit: quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO IV.

E*X cubo (A) in cubum (B) ſit cubus (AB.)*

A.	B.
AA.	AB.

a præc. A in ſe ſit AA. Erit *a* AA cubus.
b 12. 8. Et quoniam A, & B cubi ſunt, ca-
c ſchol. p. 17. 7. dent inter eos duo medii *b* pro-
d 8. *l.* 8. portionales. Sed AA eſt ad AB, *c* ut A ad B. Ergo
e 23. 8. & inter AA, AB *d* cadent duo medii. Quare cùm primus A ſit cubus, etiam quartus *e* AB erit. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO V.

S*I cubus (A) multiplicans aliquem numerum (B) gignat (AB) cubum, etiam multiplicatus (B) cubus erit.*

A.	B.
AA,	AB.

a 3. 9. Cubus A in ſe faciat AA. erit *a*
AA cubus. Quoniam igitur AA &
AB ambo cubi ſunt, inter eos ca-
b 12. 8. dent duo *b* medii proportionales. Sed AA eſt ad
c ſchol. p. 17. 7. AB *c* ut A ad B. Ergo etiam inter A & B *d* cadent
d 8. 8. duo medii. Quare cùm primus A cubus ſit, etiam
e 23. 8. *e* quartus B cubus erit. Quod erat demonſtrandum.

Corollaria.

1. EX cubo (A) in non cubum (X) fit non cubus. Aliàs enim per 5, etiam X foret cubus, contra hypotheſim.

2. Si

2. Si cubus A in B faciat non cubum, neque B cubus erit. Aliàs per 4. etiam factus ex A in B foret cubus, contra hypotheſim.

PROPOSITIO VI.

SI numerus (A,) in ſe ductus facit cubum (B) & ipſe cubus eſt.

A in B producat E. Quoniam A in ſe fecit B, & A rurſum in B fecit E, patet E *a* cubum eſſe. Et quia A in B cubus fecit E cubum, etiam B cubus in A, facit *b* cubum E. Ergo & A *c* cubus eſt. Quod erat demonſtrandum.

A.
B. E.

a *defin.* 29.
b 17. 7.
c 5. 9.

PROPOSITIO VII.

COmpoſitus numerus (A) multiplicans quemvis numerum (B) generat ſolidum. (E)

Compoſitum numerum, aliquis (præter unitatem) metitur *a* numerus (qui ſit C) per aliquem numerum, qui ſit D. Ergo C in D eſt *b* A. Sed A in B *c* eſt E. Ergo E fit ex multiplicatione trium C, D, B, Ergo E ſolidus *d* eſt. Quod erat demonſtrandum.

A. B. E
C. D.

a *defin* 22.
b *ax.* 8.
c *hyp.*
d *defin.* 26.

Lemma.

In ſerie numerorum ab unitate continuè proportionalium (1. A, B, C, D, E, &c.) numerus (A) primus ab unitate, multiplicans quemlibet (D) producit ſequentem. (E)

Erit enim *f* ut 1. ad A, ita D ad E: ex quo res patet.

f *defin.* 13.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

SI numeri quotcumque fuerint ab unitate continuè proportionales. (B) ſecundus (B unitate ſecluſâ) quadratus erit, & uno intermiſſo omnes (D, F, H, &c.)

Tertius autem (C) cubus eſt, & duobus intermiſſis omnes (F, K, &c.)

Sextus vero (F) cubus ſimul & quadratus, & quinque intermiſſis omnes.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1.	A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.	H.	K.	L.	M.	N.	O.
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.						

a defin. 13. o defin. 28. b 22. 8. Pars 1. Quoniam ut 1 eſt ad A, ſic A eſt ad B, patet *a* A in ſe facere B, ac *o* proinde B quadratus eſt. Deinde quia B, C, D, ſunt continuè proportionales, & B quadratus eſt; etiam *b* D quadratus erit. Et ſic deinceps uno intermiſſo.

c lem. d defin. 29. e 23. 8. Pars 2. Quoniam A in ſe fecit B, & A rurſum *c* in B facit C, erit *d* C cubus. Deinde quia C, D, E, F, ſunt quatuor continuè proportionales, & C cubus eſt, etiam F cubus *e* erit: & ſic deinceps duobus ſemper intermiſſis.

Pars 3. patet ex 1 & 2.

Scholium.

QUoniam primus in ſerie numerus A multiplicans quemcumque alium ex ſerie producit ſequentem, liquet continuè proportionalium ſeriem pulcherrimè exprimi ſolâ litterâ (A) numerum quemlibet deſignantis continuâ appoſitione, hunc in modum.

1. A

0	1	2	3	4	5	
1.	A.	AA.	AAA.	AAAA.	AAAAA.	A 6.

A 7. A 8. A 9. A 10. A 11. A 12.

A quippe in ſeipſum, facit AA quadratum: A in AA, facit AAA cubum & ſic deinceps. Quin verò ſic tota propoſitionis demonſtratio uno intuitu perſpicitur. Quoniam enim multiplicationis productum litterarum appoſitione exhibetur, liquet quadratum eſſe, cùm litterarum multitudo par eſt, quam proinde binarius metiatur, ut ſit loco ſecundo, quarto, & ſequentibus uno intermiſſo. Rurſum liquet tum eſſe cubum; cùm numerum litterarum metitur ternarius, ac proinde triſecari poteſt, quod evenit loco tertio, ſexto & ſequentibus binis ſemper intermiſſis. Denique apparet cùm litterarum multitudo eſt numerus primus, ut, 5, 7, 11, 13, &c. Nec cu*bum haberi, nec quadratum, quia nimirum cùm primos numeros nullus numerus metiatur, litterarum multitudo tum nequit aut biſecari, quod ad quadraticam, aut triſecari, quod ad cubicam multiplicationem requiritur: ſolent ab arithmeticis, hi numeri ſurdeſolidi ſive ſuperſolidi appellari.* O*mnes autem reliqui progreſſionis termini vel quadrati, vel cubi ſunt, vel utrumque; quia cùm numeri litterarum ſeu dimenſionum quibus conſtant, ſint compoſiti, eos vel binarius vel ternarius, vel uterque metitur, ac proinde aut biſecari poſſunt, aut triſecari, aut utrumque.*

Solent porrò numeri progreſſionis jam dicta, vocari poteſtates, ac ſcribi ſupra eos numeri ordine naturali, qui locum ſeu dimenſiones ſingulorum indicent, dicunturque exponentes. Itaque in priori ſerie, quâ ante Scholium uſi ſumus, A eſt primus terminus, vocaturque radix; B ſecundus ſeu duarum dimenſionum, & quadratus dicitur: C *tertius ſeu trium dimenſionum,*

&

& cubus appellatur, &c. In altera ſerie ipſa litterarum multitudo, locum, latera, ac dimenſiones poteſtatum ſingularum exprimit.

Ex dictis ſupra patet 1. in quacumque ſerie continuè proportionalium terminum, cujus exponens eſt 6, eſſe ſimul cubum & quadratum: numerus enim laterum ejus cùm menſuretur à 2. & 3. poterit biſecari ac triſecari. 2. Intermiſſis ſemper 5, reliquos omnes fore cubos ſimul & quadratos, terminum videlicet 12, 18, 24. & cæteros quorum exponentes ſenarius metitur. Cùm enim tam 2 quàm 3 metiantur 6, 6 autem metiatur 12, 18, 24, &c. Etiam tam 2 quàm 3 eoſdem omnes metientur, qui proinde & biſecari poterunt & triſecari. Ergo, &c.

PROPOSITIO IX.

SI in ſerie continuè proportionalium ab unitate numerorum primus (A) ſit quadratus, reliqui omnes quadrati erunt.

Si primus eſt cubus, reliqui etiam omnes cubi erunt.

Pars 1. Quoniam, A per hypotheſim, & B per præ- 1. A. B. C. D. E. F.
a cor. 1. 2. 9. ced. quadrati ſunt, & A in B facit C, etiam *a* C quadratus erit. Rurſum quia quadratus A, in
o lem. quadratum C, *o* facit D, etiam D *a* quadratus erit. Et ſic deinceps.

Pars 2. Quoniam A per hypotheſim cubus eſt,
c 3. 9. & A in ſe facit B, etiam in B cubus *c* erit. Et quia
n lem. A cubus in B cubum *n* facit C, etiam *d* C cubus
d 4. 9. erit. Et ſic deinceps.

PRO-

PROPOSITIO X.

SI continuè proportionalium ab unitate numerorum primus (A) quadratus non ſit, neque alius ullus quadratus erit, præter ſecundum (B) & reliquos uno ſemper intermiſſo ſequentes (D, F) &c.

Et ſi primus non ſit cubus, neque alius ullus cubus erit præter tertium & reliquos duobus intermiſſis ſequentes (F, &c.)

1. A. B. C. D. E. F. G.

Pars 1. Sit enim, ſi fieri poteſt, E quadratus. Quoniam igitur E eſt ad D, ut B. ad A, ſuntque quadrati *a* E, *b* D, *b* B, etiam A *g* quadratus erit contra hypotheſim. *a quia ponitur.*

Pars 2. Eſto (ſi fieri poteſt) D cubus. Cùm ergo etiam cubi ſint *c* F & C, ſitque per hypotheſim & ex æquo, ut F ad C ſic D ad A; etiam A *d* cubus erit, contra hypotheſim. b 18. 9. g 24. 8. c 8. 9. d 25. 8.

PROPOSITIO XI.

IN ſerie numerorum ab unitate continuè proportionalium minor quilibet (C) quemlibet majorem (G) metitur per aliquem numerum, qui eſt in ſerie.

1. A. B. C. D. E. F. G.

Ex æquo enim C eſt ad G, ut I ad D. Ergo C metitur *f* G per D. *f deſin.* 15.

Corollaria.

1. QUantùm major (G) diſtat à metiente (C) tantùm (D) is per quem minor majorem metitur; diſtat ab unitate.

2. Primus (A) metitur quemlibet (D) per præcedentem (C)

3. Quivis in ſerie numerus (C) ſeipſum multiplicans, producit numerum (F) eodem à ſe intervallo diſtantem, quo ipſe ab unitate.

4. Si quivis in ſerie numerus (B) multiplicet quemvis (D) etiam in ſerie, quantùm diſtat, I, ab minore (B) tantùm diſtabit major, (D) à producto (F,)

PROPOSITIO XII.

S*I ab unitate fuerint numeri quotcumque continuè proportionales, primus numerus* (E) *qui metitur ultimum* (D) *metietur & unitati proximum* (A.)

1. A. B. C. D.   E. H. G. F.

Ponatur enim (ſi fieri poteſt) E primus non metiri A. Ergo
a 31. 7. *a* E & A ſunt primi inter ſe.
b cor. 2. præc. Quoniam verò E metitur D, metiatur per F.
Metitur autem & A eundem *b* D per C. Ergo E
n corol. 19 7. eſt ad A, ut *n* reciprocè C ad F. Sed quia E & A
d 23. 7. ſunt primi inter ſe, erunt minimi *d* in ſua pro-
e 21. 7. portione. Ergo E metitur C, *c* puta per G. Quare
f cor. 2. præc. cùm eundem C metiatur *f* A per B, rurſum erit
g corol. 19 7. E ad A, *g* ut B ad G. Ergo quia E, A, ſunt in ſua
h 21. 7. proportione minimi, iterum E metitur *h* B puta
k corol. 12. 7. per H. Atqui etiam A metitur B per A, (nam
A in ſe facit A, ut patet ex 8.) Ergo rurſum *k* E
eſt ad A, ut A ad H. Quare

A. A. E. H. Quare cùm E, A, ſint in proportione ſua minimi E *l* metitur A. Quod erat demonſtrandum. l 21. 7.

Scholium.

P*Vlchra & ſubtilis hæc demonſtratio eſt, in qua ex contradictorio aſſertionis, aſſertio ipſâ directâ demonſtratione infertur.* De *hoc genere demonſtrationis vide, ſi lubet, quæ diſſeruimus in appendice poſt elementa* Geome*triæ.*

PROPOSITIO XIII.

S*I numerorum ab unitate continuè proportionalium proximus unitati (A) primus eſt, maximum (D) nullus alius metietur præter eos qui ſunt in numeris proportionalibus.*

1. A. B. C. D.
E. F. G. H.
O

1. Metiatur enim (ſi fieri poteſt) E diverſus ab ipſis A, B, C, maximum D. Non erit E primus, aliàs etiam E metiretur *a* A, ac proinde A non eſſet primus, contra hypotheſim. Igitur E compoſitus eſt; ac proinde eum metitur *b* aliquis primus. a *præ.* b 34. 7.

2. Quem dico eſſe A; ſi enim alius primus O metiretur E, quoniam E metitur D, etiam O *c* metiretur D, adeoque *d* & ipſum A, quod eſt abſurdum, cùm A primus ſit. Metiatur jam E ipſum D. per H. c *ax.* 11. d *præ.*

3. Erit H diverſus ab A, B, C. Sit enim (ſi fieri poteſt) H idem cum aliquo ipſorum A, B, C,

puta cum C. Ergo E metitur D per C; ac proinde etiam C e metitur D per E. Ergo E eſt unus f ex ſerie A, B, C. Quod eſt abſurdum, cùm E volueris eſſe non unum ex ſerie A, B, C. Ergo H diverſus eſt ab ipſis A, B, C.

1. A. B. C. D.
E. F. G. H.
O.

e ax. 9.
f 11. 9.

4. Deinde H non erit primus, aliàs cùm H metiatur D, metiretur g quoque A, primum ex hypotheſi quod eſt abſurdum. H igitur compoſitus eſt.

g præc.

5. Quia autem H compoſitus eſt, metietur eum aliquis primus, quem dico eſſe A. Si enim alius primus O metiretur H, cùm H metiatur D (nam quia E per H metitur D, etiam H h per E metietur D) metietur quoque i O ipſum D, ac proinde etiam k ipſum A primum: quod eſt abſurdum.

h ax. 9.
i ax. 11.
k præc.

6. Jam quia A metitur l D per C, itemque E metitur D per H, erit ut A ad E m ita reciprocè H, ad C. Quare cùm (ut oſtendi num. 1.) A metiatur E, etiam H metietur C, puta per G. Quoniam igitur, ſicut E diverſus ab A, B, C, metiebatur poſtremum D, per H, ita nunc H, quem jam oſtendi num. 3. diverſum eſſe ab A, B, C, metitur ipſorum A, B, C, poſtremum C, per G. Oſtendam eodem modo G diſtinctum eſſe ab A, B, & non eſſe primum, & menſurari ab A, quo hæc tria oſtendi de numero H.

l corol. 2. 11. 9.
m corol. 19. 7.

Quia ergo A metitur C n per B, & H metitur C per G, erit ut o A ad H, ita reciprocè G ad B. Sed oſtendi num. 5. A metiri H. Ergo etiam G metitur B, puta per F. Oſtendam rurſus

n corol. 2. 11. 9.
o corol. 19. 9.

ſus F diverſum eſſe ab A, planè ut oſtendi num. 3. H eſſe diverſum ab A, B, C, & G ab A, B.

Quoniam igitur A per A (hoc eſt per ſe) metitur B, & G per F metitur B, erit ut A ad G, *p* ſic reciprocè F ad A. Sed eſt oſtenſum nu. 6. A metiri G. Ergo etiam F metitur A, quod eſt abſurdum, cùm A primus ſit. Sed hoc abſurdum inde deductum eſt, quod poneretur E diverſus ab A, B, C, metiri D. Liquet ergo nullum ab A, B, C diverſum metiri D. Quod erat demonſt. p *corol.* 19. 7.

Scholium.

HÆc demonſtratio, quæ ratiocinationis flexu mirabili tandem infert quæſitum, meritò è difficilioribus una videri poteſt. Breviorem aliam ſubſtituit Claudius Richardus noſter, Euclidis commentator præclarus, ſed eâ non confici propoſitum, facilè intelliget, qui legerit.

PROPOSITIO XIV.

MInimum numerum (A) quem primi numeri (B, C, D) metiuntur, nullus alius primus præter datos metitur.

A. B.C.D. E.F.

Metiatur (ſi fieri poteſt) minimum A, alius quiſpiam primus E, per F. Ergo E in F facit *a* A, ac proinde E, F ſunt latera ipſius A. Quoniam ergo B, C, D, metiuntur A, metientur quoque *b* alterutrum E, F. Non E primum. Ergo F. Sed F minor eſt quàm A; nam F in E facit A. Ergo A non eſt minimus, quem metiuntur B, C, D. Quod hypotheſim evertit. a *ax.* 8. b 32. 7.

PROPOSITIO XV.

SI fuerint tres proportionales in ratione ſuâ minimi, (AA, AB, BB,) duo quilibet compoſiti ad reliquum primi erunt.

A. B. AA. AB. BB.

Ex prop. 2. l. 8. manifeſtum eſt ſi A, B. duo minimi ponantur in ratione data, AA, AB, BB fore tres minimos in eâdem ratione. Jam
a 24. 7. quia A & B ſunt *a* primi inter ſe, etiam *c* A † B
c 30 7. ad B, primus eſt. Sed etiam A ad B primus eſt.
d 26. 7. Ergo etiam *d* factus ex A † B, in A, (nempe AA
e 27. 7. † AB) ad B primus eſt. Quare AA † AB ad BB etiam *e* primus erit. Eodem planè modo oſtendam, BB † AB ad AA eſſe primum.

Reliquum eſt ut etiam AA † BB ad AB primus ſit. Quoniam A, B, ſunt primi inter ſe, ac
f 30. 7. proinde *f* etiam tam A, quàm B ad A † B primus
g 26. 7. eſt, erit quoque AB genitus ex A in B, ad A † B
h 4. 2. *g* primus. Ergo AB ad *h* ipſius A † B quadratum,
i 27. 7. hoc eſt ad *i* AA † BB † AB, primus eſt. Ergo
k 30. 7. dividendo AB primus *k* eſt ad AA † BB † AB.
n *ibid.* Ergo rurſum *n* dividendo AB primus eſt ad AA † BB, Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVI.

DVobus numeris inter ſe primis (A & B) nequit tertius proportionalis exhiberi.

A B. b. C. 5. 7. 7.

Sit enim (ſi fieri poteſt) ut A ad B, ſic b ad alium C. Quia pri-
a 23. 7. mi ſunt inter ſe A & B, erunt *a* minimi ſibi pro-
b 21. 7. portionalium. Ergo A *b* metitur b. Sed etiam A me-

A metitur ſe. Ergo A & b, ſunt inter *c* ſe compoſiti, contra hypotheſim. Quod eſt abſurdum. c *deſin.* 24.

PROPOSITIO XVII.

Si in continuè proportionalium ſerie extremi (A, D) ſunt primi inter ſe, ea non poterit ulteriùs continuari.

Sit enim (ſi fieri poteſt, ut A ad B, & B ad C &c. ſic D ad alium E. Igitur permutando ut A ad D, ſic B ad E. Sed A & D ſunt *a* inter ſe primi, ac proinde *b* minimi in ſuâ ratione. Ergo *c* A metitur B. ſed B metitur *d* C, & C metitur D. Ergo A *e* metitur D. ſed & A metitur ſe. Ergo *f* A & D ſunt inter ſe compoſiti; contra hypotheſim.

A. B. C. D. E.

a *hyp.*
b 23. 7.
c 21. 7.
d 1. 9.
e *ax.* 11.
f *def.* 24.

PROPOSITIO XVIII.

Duobus numeris datis (A, B) conſiderare an poſſit ipſis tertius proportionalis exhiberi.

Si A, B ſunt primi inter ſe non poſſe reperiri tertium propoſitione patet ex 16.

A. B. X.
BB.

Si A, B non ſunt inter ſe primi, B in ſe faciat BB. Si A metitur BB, puta per X, erit X tertius proportionalis. Nam X in A *a* faciet BB. Sed & B in ſe facit BB. Ergo *b* A eſt ad B ut B ad X.

a *ax.* 8.
b 20. 7.

Si A non metitur BB, non poterit exhiberi tertius proportionalis Detur enim (ſi fieri poteſt) Z. Ergo A in Z

A. B. Z.
BB.

c *ibid.* facit BB, eundem *c* quem B in ſe. Quia ergo A in
d *ax.* 7. Z eſt BB, A per Z metietur *d* BB; contra hypotheſim.

PROPOSITIO XIX.

T*Ribus numeris datis (A, B, C) conſiderare an quartus proportionalis poſſit exhiberi.*

A. B. C. X. Secundus B in tertium C du-
BC. ctus faciat BC. Si primus A metitur BC, puta per X, erit X
a *ax.* 8. quartus proportionalis. Nam tunc A in X *a* fa-
b 19.7. ciet BC, æquè ac B in C. Ergo *b* ut A ad B, ſic, C ad X.

A. B. C. Z. Si A non metitur BC, non po-
BC. terit exhiberi quartus proportionalis. Detur enim Z, ſi fieri po-
c 19.7. teſt. Ergo A in Z *c* faciet BC, eundem quem B
d *ax.* 7. facit in C. Ergo A *d* metietur BC per Z; contra hypotheſim.

Scholium.

P*Ropoſitiones 4. præcedentes intelligendæ ſunt de numeris integris. Quibuſvis enim duobus numeris tertius, & quibuſvis tribus quartus proportionalis exhiberi poteſt per fractiones, ut docebitur in Arithmetica practica.*

o *Arith. pract.* 1. *ſ.c.* 7. *Hoc verò obſervatu dignum eſt, quod ſuo* o *loco demonſtrabimus, quamvis duobus quibuſlibet tertius proportionalis & tribus quartus, ſaltem fractus dari poteſt, tamen inter quos medius integer dari nequit, inter eos neque fractus quidem ullus poterit exhiberi.*

Datis

Datis tribus numeris, A,B,C, quartus proportionalis invenitur etiam hunc in modum. A. B. C. Z D.

Primus A dividens ſecundum B, faciat quotientem D. Tertius C multiplicans D, gignat, Z. hic eſt quæſitus.

Cùm enim A dividat B per D, etiam i *A in D faciet B. Sed & C in D* m *gignit Z. Ergo A eſt ad B,* n *ut C ad Z.* i *ax.* 8. m 17. 7. n 17. 7.

Impoſſibilis erit quartus proportionalis integer, non ſi A non metitur B, ſed ſi factus ex C in D non ſit integer, aut ad integrum reducibilis.

PROPOSITIO XX.

Primi numeri ſunt infiniti.

A. B. C. X † I. Z.

Dentur primi tres A, B, C. Inveni *k* X minimum, *k* quem A, B, C metiuntur, cui adde, 1. Si X † 1 primus eſt, jam quartus habebitur primus. Si X † 1 non eſt primus, eum aliquis *a* primus metietur puta Z. hic erit primus à datis A,B,C diverſus. Sit enim (ſi fieri poteſt) idem cum datorum aliquo C. Ergo quia C metitur X, etiam Z metietur X. Sed Z etiam metitur X † 1. Ergo Z metietur *b* quoque 1, quod eſt abſurdum. Ergo Z novus primus eſt. Eodem modo invenientur plures ſine termino. k 38. 7. a 34. 7. b *ax.* 12.

PROPOSITIO XXI.

Numeri pares quotcunque (A, B, C,) componunt parem.

A. B. C. N. O. P.

Quoniam A, B, C pares ſunt, eorum *a* ſemiſſes ſint N, O, P. Quia igitur a *defin.* 16.

eſt ut A ad N, ſic B ad O, & C ad P, erit ut A
b 12. 5. ad N, *b* ſic ſumma A, B, C, ad ſummam N, O, P.
Sed A eſt duplus N. Ergo ſumma A, B, C, dupla
eſt ſummæ N, O, P; adeoque ſumma N, O, P,
c defin 16. eſt ſemiſſis ſummæ A, B, C. Ergo ſumma A, B, C
c par numerus eſt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXII.

Impares (A, B, C, D) multitudine pari, componunt parem.

A. B. C. D. Aufer à ſingulis unitatem. Tum
a defin. 17. & *a* reliqui pares erunt, & unitates ablatæ *b* parem component. Quare per præ-
b hyp. ced. reliqua & ablata ſimul (hoc eſt ipſi A, B, C, D) component parem.

PROPOSITIO XXIII.

Impares (A, B, C) multitudine impari componunt imparem.

A. B. C.
C--1

c defin. 17. Quoniam *c* impar à pari differt unitate, erit C--1 par. Sed & im-
d præc. pares A, B *d* componunt parem.
e defin. 17. Ergo A, B, C--1 componunt parem. Sed ſumma A, B, C--1 ab ſumma A, B, C, differt unitate. Ergo ſumma A, B, C eſt numerus *e* impar. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Pari ratione impar additus pari componit imparem.

PRO-

ROPOSITIO XXIV.

I à pari numero (D) ſubtrahatur par (E,) reliquus (F) par erit.

Jam ſi reliquus F foret impar, cum pa- D
componeret *a* imparem. Sed F cum E E a corol.
nponit D. Ergo D impar eſſet; contra F præc.
othesim.

PROPOSITIO XXV.

I à pari numero (A) impar (B) ſubtrahatur, reliquus (C) erit impar.

Nam ſi reliquus C eſſet par, is cum im- A
i B faceret *b* imparem. Sed C cum B fa- B b corol.
A. Ergo A foret impar contra hypo- C 23. 9.
eſim.

PROPOSITIO XXVI.

I ab impare (E) ſubtrahatur impar (F) reliquus (G) erit par.

Nam ſi G foret impar, is cum impare F E
mponeret E *c* parem. Quod evertit hy- F c 22. 9.
thesim. G

PROPOSITIO XXVII.

SI ab impare (A) ſubtrahatur par (B) reliquus (C) erit impar.

Nam ſi C foret par, cum pari B compo-
neret *a* A parem; contra hypotheſim. a 21. 9.

PRO-

PROPOSITIO XXVIII

PAr & impar (A, B) invicem multipli-
tes producunt (C) parem.

b *defin.* 13. A 2. B 3. Componitur *b* enim C ex pa-
c 21. 9. C 6. toties ſumpto, quot ſunt uni-
in B. Ergo C par *c* eſt.

Corollaria.

1. PAr multiplicans parem gignit pa-
Patet eodem modo ex 21.

2. Omnis pariter impar, eſt par. Patet ex
19 axiomatis 7. & hac propoſitione.

PROPOSITIO XXIX.

IMpar (D) multiplicans imparem (E) p-
ducit imparem (F,)

a *defin.* 13. D 3. E 5. Componitur *a* enim F ex D imp-
b 23. 9. F 15. toties ſumpto, quot ſunt unit-
in impare E. Ergo F impar *b* eſt.

Corollaria.

12 B, 3 A { C 4. 1. *Impar (A) metiens parem (*
eum metitur per parem (C.) Na-
c *ax.* 8. C foret impar, quia A in C *c* p-
d 29. 9. ducit B, eſſet B *d* impar (utpotè genitus ex i-
pare A in imparem C.) Quod repugnat hyp-
theſi.

2. I

5 E } F 5. 3 D }

2. *Impar (D) metiens imparem (E) eum metitur per imparem (F.)* Nam ſi F foret par, quoniam D impar in F parem gignit *a* E, eſſet E *b* par; contra hypotheſim. a ax. 8. b 28. 9.

Scholium.

Ex his demonſtrari jam poterit nullum numerum (AB) ita ſecari poſſe, ut genitus ex toto (AB) in unam partem (CB) ſit æqualis quadrato partis alterius (AC:) ac proinde propoſitionem 11, *l.* 2. *nullo modo poſſe numeris applicari, quamvis* 10 *primæ ejuſdem libri propoſitiones omnes etiam in numeris ſint veræ.*

A———C——B
D—E–

Sit enim (ſi fieri poteſt) genitus ex AB in CB par quadrato ex AC.

Vel AC par eſt & CB impar:
Vel AC impar & CB par.
Vel uterque AC, & CB impar.
Vel uterque par.

Eſto primum AC par & CB impar. Ergo totus AB eſt a *impar. Ergo genitus ex AB impare in CB imparem, impar* b *eſt. Eſt* c *verò par quadratus, ex AC pari. Ergo impar genitus ex AB in CB æquatur pari nempe quadrato ex AC. Quod eſt abſurdum.* a corol. 23. 9. b 29. 9. c corol. 28. 9.

Sit Deinde AC impar, & CB par. Ergo totus AB d *impar eſt. Ergo factus ex impare AB in CB parem par* e *eſt. Atqui quadratus imparis AC impar* f *eſt. Ergo rurſum hic impar, illi pari æqualis eſt. Quod eſt abſurdum.* d corol. 23. 9. e 28. 9. f 29. 9.

Sit tertiò uterque AC, CB impar. Ergo totus AB g *par eſt. Ergo factus ex AB pari in imparem CB par* h *eſt. Imparis autem AC quadratus* i *impar eſt. Ergo rur-* g 22. 9. h 28. 9. i 29. 9.

rurſum hic impar illi pari ex AB in CB æqua[lis] Quod eſt abſurdum.

Sit denique uterque AC, CB par. Sumant[ur] minimi D, E, in ratione AC, ad CB. Erunt D, E
k 24. 7. *mi k inter ſe ; ac proinde nequeunt ambo eſſe p[ares] aliàs metiretur eos binarius ; ſed vel ambo ſunt [impa]res ; vel D par , E impar ; vel D impar , E par. [Et] quia AB in CB æquatur quadrato AC, erit ut A[B ad] AC, ita AC ad CB. Et quia E eſt ad D ut B[C ad] CA, erit componendus E cum D ad D, ut BA a[d AC,]*
l oſtendi ante. *hoc eſt ut l AC ad CB, hoc eſt ut m D ad E. Qu[ia]*
m hyp. *igitur D cum E eſt ad D, ut D ad E, erit genitu[s ex D] cum E in E æqualis quadrato ex D. Quod fier[i non] poſſe , tribus primis partibus demonſtratum eſt.*

At quiſpiam ſuſpicabitur ita ſecari fortaſſis [nume]rum poſſe in duas partes , quibus fractiones adhæ[reant.] Verùm ſi illæ partes reducantur ad duas fra[ctiones] ejuſdem denominationis , ut docebitur in Aritm. p[ract.] l. 2. c. 3. prob. 2. facilè apparebit ne id quid[em] poſſibile.

PROPOSITIO XXX.

S*I impar (B) metiatur parem (A,) &* [...] *dimidium metietur.*

12 A	{ C
3 B	

Impar B metiatur A parem per
a corol 1. 25. 9. C. Erit *a* C par: & C metietur quo-
b ax. 9. que A *b* per B. Ergo & dimidium ipſius C metietur dimidium ipſius A per B [...] enim ut C ad A , ſic dimidium C ad dimid[ium]
c idem. A.) Ergo etiam B per dimidium C meti[tur] dimidium A. Quod erat demonſtrandum.

PR[...]

PROPOSITIO XXXI.

SI impar (A) ad aliquem (B) primus eſt, etiam ad illius duplum (C) primus erit.

Nam ſi A & C non ſint primi inter ſe, metiatur eos aliquis D, A quidem per E. Erit D neceſſariò impar, aliàs D par in E gigneret A *a* parem. Quoniam ergo D impar metitur C parem (eſt enim C par, cùm duplus ſit B,) etiam D metietur *b* B ejus dimidium. Ponebas autem etiam D metiri A. Ergo A, B non ſunt primi inter ſe; contra *hypotheſim*.

A 3. B 5.
C 10. D. E.

a 28. 9.
b *præc.*

Corollarium.

IMpar A, qui primus eſt ad aliquem B, etiam primus eſt non ſolùm ad duplum B, ſed etiam ad quadruplum, octuplum &c. Patet ex propoſitione.

PROPOSITIO XXXII.

SI proportio dupla ab unitate continuetur, in infinitum (1, 2, 4, 8, 16. &c.) habentur omnes pariter pares tantùm.

1.	A.	B.	C.	D.	E.	F.	
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	
				1.	R.	P.	O

Quod ſinguli ſint pariter pares, patet ex 11. l. 9 per hanc enim 2 metitur quemlibet in ſerie, per aliquem ex ſerie, hoc eſt per parem. Ergo per definitionem 18.

Quod ſint pariter pares tantùm, patet ex 13. l. 9. cùm enim 2 proximus unitati ſit primus, nullus metietur ullum ipſorum 2, 4, 8 &c. Præter

eos,

eos, qui ſunt in ſerie, hoc eſt præter pares. Ergo per definitionem 18.

1.	A.	B.	C.	D.	E.	F:
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.
			1.	R.	P.	O.

Quod nullus præter hos ſit pariter par tantùm ſic oſtendo. Eſto tantùm pariter par quicunque O, cujus dimidium ſit P. hic erit par; aliàs ſi P foret impar, binarius per imparem P metiretur O, adeoque O eſſet pariter impar; contra hypotheſim. Semiſſis ergo ipſius P. eſto R. Hic rurſum erit par; ſi enim R eſſet impar, cùm ſit quarta pars ipſius O, numerus 4. per imparem R. metiretur O,rurſus contra hypotheſim. Atque ita ſemper ſemiſſis prioris erit par, donec veniatur ad 1. Sit ergo, 1, ſemiſſis ipſius R Erunt igitur R, P, O, ab unitate dupli, ac proinde O unus ex ſerie. Liquet ergo propoſitum.

PROPOSITIO XXXIII.

SI omnes numeri impares duplentur, provenient omnes pariter impares tantùm (4. 6. 10. *&c.*)

3.	5.	7.	9.	11.
6.	10.	14.	18.	22.
A.	B.	C.	D.	E.
		7	N. 2.	
			P. Q.	

Singuli pariter impares ſunt, quia eorum ſemiſſis eſt *a* impar, adeoque metietur binarius ſingulos per ſemiſſem imparem.

a *hyp.*

Eſſe pariter impares tantùm ſic oſtendo. Sumatur quilibet ex illis, puta D cujus ſemiſſis eſto N & apponatur binarius. Si ergo D eſt etiam pariter par, metiatur *b* eum P par per parem Q. Quoniam igitur etiam N per

b *defin.* 18.

2 me-

2 metitur eandem D, erit *c* Q ad N ut 2 ad P. *c corol. 19. 7.* Sed 2 metitur P parem. Ergo etiam Q par metitur imparem N: quod eſt abſurdum contra 21. l. 9.

Quod nullus præter hos ſit pariter impar tantùm, ſic oſtendo. Si quis præter hos eſſet alius, is deberet *d* eſſe par. Pares autem numeri aut habent partes dimidias, ac proinde ſunt ab unitate dupli, adeoque per præcedentem ſunt pariter pares tantùm, vel habent dimidios impares, & ſic per ſequentem ſunt pariter pares & pariter impares. Ergo &c. *d corol. 28. 9.*

PROPOSITIO XXXIV.

P*Ares numeri (A. B. C. D. E.) qui nec à binario dupli ſunt, nec dimidium habent imparem, ſunt pariter pares & pariter impares. Et præter hos alius nullus.*

Singuli pariter pares ſunt; quia cùm eorum dimidii pares ſint, binarius eos per illos dimidios pares metitur. Ergo per definitionem 18.

12.	20.	24.	28.	36.	40.	44.	48.
A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.	H.

Quod etiam pariter impares ſint, ſic oſtendo. Sumatur quilibet ex illis B, quem ſi dividas bifariam, & dimidium rurſus bifariam, ac ſic deinceps, tandem incides in aliquem imparem (ſi enim incideremus ſemper in pares, incideremus tandem in 2, ac proinde B eſſet ab unitate duplus, contra hypotheſim) impar autem ille metietur parem B per *b* parem. Ergo B pariter impar eſt. *b corol. 1. 29. 9.*

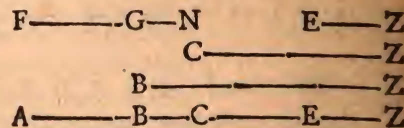
Atque ex his patet 3. pars præcedentis.

Quod præter hos alii nulli ſint pariter pares & pariter impares patet ex duabus præcedentibus propoſitionibus.

PROPOSITIO XXXV.

SI fuerint quantitates continuè proportionales quotcunque (EZ, CZ, BZ, AZ) *erit ut* (CE) *exceſſus ſecundæ* (CZ) *ſupra primam, ſive minimam* (EZ) *ad minimam* (EZ;) *ita exceſſus* (AE) *maximæ* (AZ) *ſupra minimam, ad omnes ſimul reliquas* (BZ, CZ, EZ.)

Transfetantur EZ, CZ, BZ in maximam AZ, Quo-



niam AZ eſt ad BZ, ut BZ ad CZ, & CZ ad EZ,
a 17. 5. erit *a* dividendo AB ad BZ, ut BC ad CZ, & CE
b 12. 5. ad EZ. Quare *b* ut una AB ad unam BZ, ſive ut CE ad EZ, ita ſimul omnes AB, BC, CE (hoc eſt AE) ad omnes ſimul BZ, CZ, EZ, Quod erat demonſtrandum.

Ex hac propoſitione, cujus fœcunditatem non videntur priores arithmetici obſervaſſe, ſequentia deducemus.

Corollaria.

1. Si fuerint quotcumque numeri continuè proportionales (EZ, CZ, BZ, AZ,) erit ut denominator proportionis unitate mulctatus ad unitatem, ita minimi & maximi termini differentia (AE) ad ſummam omnium dempto maximo (AZ.)

Deno-

Denominatorem referat FN, unitatem verò GN. Igitur ut FN eſt ad GN, ita CZ eſt ad EZ; & dividendo, ut FG denominator ſcilicet unitate mulctatus, eſt ad GN unitatem, ita CE eſt ad EZ; hoc eſt, per hanc propoſitionem, ita eſt AE ad ſimul omnes BZ, CZ, EZ.

2. Iiſdem poſitis dato denominatore (FN) & maximi ac minimi termini differentiâ (AE) habetur ſumma omnium dempto maximo, ſi (AE) maximi & minimi differentia, dividatur per denominatorem unitate multatum (FG.)

Cùm enim ſit *c* ut FG ad GN unitatem, ita AE ad omnium ſummam dempto AZ, ea exhibebitur, ſi quartus proportionalis inveniatur; is verò obtinetur, ſi *d* terminus ſecundus, nempe unitas, ducatur in AE tertium, & productus, qui manet ipſe AE, dividatur per primum FG. *c corol. 1. præc.* d 19. 9.

3. Quod ſi termini proportionalis fuerint magnitudinis, habebitur ſumma omnium demptâ maximâ, ſi fiat ut (CE) duarum collateralium differentia ad minorem (EZ) ita (AE) maximæ & minimæ differentia ad aliam. Patet ex ipſa propoſitione.

4. Si data ſeries proportionalium, ſeu numerorum, ſeu magnitudinum eſt proportionis duplæ, habetur omnium ſumma, demptâ maximâ, ſi minima auferatur à maxima.

Per hanc enim 35, ut CE eſt ad EZ; ita AE eſt ad omnes BZ, CZ, EZ. Atqui hîc CE par eſt EZ. Ergo etiam AE par eſt omnibus BZ, CZ, EZ.

5. Iiſdem poſitis ut (AB) differentia duorum maximorum terminorum (AZ, BZ) eſt ad maximum, ita (AE) maximus, dempto minimo, eſt ad omnium ſummam, dempto minimo.

Oſtenſum eſt enim in propoſitione, ut AB eſt ad BZ, ita AE eſſe ad omnes BZ, CZ, EZ. Ergo ut AB eſt ad AZ, ita AE eſt ad omnes AE, BZ, CZ, EZ, hoc eſt ad omnes demptâ minimâ EZ.

Scholium.

Qui hanc propoſitionem ejuſque corollaria contulerit cum iis, quæ ſcripſi ad propoſitionem 11. *l.* 6. *facilè intelliget hinc deduci poſſe totam contemplationem illam, quâ ſeriei infinitarum proportionalium quantitatum una exhibetur omnibus æqualis. Nam* f per hanc 35. *cùm finitus eſt proportionalium numerus, tum ut* f *CE eſt ad EZ; ſeu ut AB ad BZ, ita AE (hoc eſt maxima demptâ minimâ ſeu ultimâ) eſt ad omnes BZ, CZ, EZ. Cùm verò numerus proportionalium infinitus eſt, tunc ut AB eſt ad BZ, ita maxima tota AZ, eſt ad omnes BZ, CZ, EZ, &c. Ubi hoc ſolùm intereſt quod tertio loco maxima jam accipiatur tota, quia nimirum minima, quæ prius à maximæ auferebatur, jam nulla ſit, ac proinde auferri nequeat.*

Rurſus cùm finitus eſt numerus proportionalium, g cor. 5. præc. *ut AB* g *eſt ad AZ maximam, ita AE (hoc eſt maxima demptâ minimâ) eſt ad omnes AE, BZ, CZ, EZ, (hoc eſt ad omnes demptâ minimâ, At verò cùm infinitus eſt proportionalium numerus, tum ut AB eſt ad maximam AZ, ita maxima AZ, eſt ad omnes AZ, BZ, CZ, EZ. Ubi rurſum hæc una differentia eſt, quod minima jam evaneſcat, ac nulla ſit, adeoque auferri nequeat.*

PRO-

PROPOSITIO XXXVI.

SI numerorum ſeries in ratione dupla ab unitate continuè proportionalium (A, B, C, D) continuetur, donec eorum ſumma (E) ſit primus numerus; ſumma (E) in maximum (D) multiplicata faciet numerum perfectum.

1. A. B. C. D.
E. O. N. P. F.
M. Q.

Quot ſunt numeri A, B, C, D, tot ſumantur ab E dupli: nimirum E, O, N, P. Ex æquo *a* igitur eſt ut A ad D, ſic E ad P. Quare ex A in P idem *b* fiet numerus, qui ex D in E, nempe F. Ergo P metitur F per A binarium, ac proinde E, O, N, P, F ſunt continuè proportionales in ratione dupla. Ergo F minùs E, equatur *c* ipſis E, O, N, P. Sed E æqualis eſt *d* ipſis 1, A, B, C, D. Ergo F minùs E ipſis 1, A, B, C, D, & O, N, P æqualis eſt. Adde utriſque E, erit F omnibus 1, A, B, C, D, E, O, N, P æqualis. Sunt autem dicti numeri partes aliquotæ ipſius F, nam cùm E, O, N, P, F, ſint continuè prop. ſinguli metiuntur *e* F. Ob eandem cauſam ſinguli 1, A, B, C, metiuntur D. D autem metitur F, nam D *f* in E fecit F. Ergo & ſinguli 1, A, B, C, D *g* metiuntur F.

a 22. 5.
b 19. 7.
c *coroll.* 4. *præc.*
d *hyp.*
e 11. 9.
f *hyp.*
g *ax.* 11.

Reliquum eſt ut oſtendatur numeri F nullam eſſe aliam partem aliquotam. Eſto M quævis aliquota ipſius F. Oſtendam eam eſſe eandem cum aliquâ ipſarum A, B, C, D, E, O, N, P, eo ipſo, quo id negatur. Ponatur enim M, non eſſe eandem cum ulla ipſarum A, B &c. Quoniam igitur M metitur F, metiatur per Q. Ergo M in Q *h* facit F. Sed etiam E in D fecit F. Ergo eſt ut E ad Q ſic

h *ax.* 8.

1. A. B. C. D. ſic M ad D. Sed quia B unitati
k *hyp.* E. O. N. P. F. proximus eſt primus, *k* utpote 2,
l 13. 9. M. Q. & M ponitur eſſe diverſus ab om-
t *hyp.* nibus A,B,C,non metitur *l* M ip-
m 31.7.
n 23. 7. ſum D. Ergo neque E metietur Q. Quare *t* cùm
o 21.7. E primus ſit, erunt E, Q *m* primi inter ſe; ideo-
p 13. 9. que in *n* ratione ſuâ minimi. Ergo E metitur M, & Q *o* metitur D. Ergo cùm A primus ſit, Q, eſt aliquis *p* ipſorum A, B, C. Sit ergo Q idem cum B: & quot ſunt B, C, D, tot ſumantur ab E dupli E, O, N. Igitur ex æquo ut B eſt ad D, ſic E eſt ad N. Idem ergo fit ex B in N, qui fit ex D in E, nempe F. Sed quia M metitur F, per Q, etiam Q in M facit F. Quare cùm idem F, fiat ex Q in M, & ex B in N, erit ut Q ad B, ita N ad M. Sed oſtendi Q eſſe idem cum B. Ergo N eſt idem cum M.

Nullas igitur F partes aliquotas habet præter 1, A, B, C, D, E, O, N, P, quibus omnibus cùm F ſit æqualis, perfectus eſt. Quod erat demonſtrandum.

Quemadmodum in 12. propoſitione hujus libri, ita & in hac ex contradictoria ſua directè aſſertio concluditur. Quod miror à Clavio, aliiſque non fuiſſe obſervatum.

Sche-

Scholium.

Ex hoc theoremate invenientur omnes numeri perfecti. Quia ſumma ex 1, 2, *eſt* 3 *numerus primus,* 3 *in ultimum* 2 *facit* 6 *primum perfectum, cujus partes aliquotæ ſunt* 1, 2, 3. *Et quia ſumma ex* 1, 2, 4. *eſt* 7 *primus numerus,* 7 *in maximum* 4 *facit* 28 *ſecundùm perfectum, cujus partes aliquotæ ſunt* 1, 2, 4, 7, 14 *Rurſum quia ſumma ex* 1, 2, 4, 8, 16. *eſt* 31 *primus,* 31 *in* 16 *facit* 496, *perfectum tertium, cujus aliquotæ partes ſunt* 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248.

Summa habetur facillimè, ſi numerus ſequens multetur unitate, ut patet ex corollario 4. *præcedente. Partes aliquotas cujuſvis perfecti ſic invenies: quot numeri accepti ſunt ab unitate dupli ſeclusâ unitate, totidem à primo ſive ſummâ accipiantur dupli annumerato primo, hi dupli cum duplis ab unitate, atque ipſa unitate, ſunt partes aliquotæ perfecti dati.*

Porrò Inventio perfectorum ex hac propoſitione & corollario 4. *præcedente breviſſimè exponitur hunc in modum. Ratio dupla ab unitate continuetur in infinitum. Vide qui numeri progreſſionis abjectâ unitate fiant primi, hi namque ducti in ſe præcedentem dabunt perfectos.*

De multitudine perfectorum hactenus inventorum. Marinus Merſennus in præf. nu. 9. *hæc ſcribit: hactenus inventos eſſe tantum* 11: *nimirum,* 6.28.496. 8128.23 (550, 336.8, 589 (869, 056. 137, 438 (691, 328. 2 (385, 843 (008, 139 (952, 128, *& tres alios, quorum poſtremus fit ex progreſſionis duplæ termino* 257*mo unitate mulctato in terminum* *tom.* 1. *phyſico. Mathem.*

num 256um: ex illis 28, quos Petrus Bungus cap. 28. de myſteriis num. recenſet, tantum 8 primos eſſe perfectos (eos videlicet, quos ſupra dedimus) reliquos 20 imperfectos. Hæc ille.

Quod autem plures hactenus non ſint reperti, inde fit quòd in ſerie progreſſionis duplæ intervalla numerorum, qui abjectâ unitate primi fiant valde magna ſint; undecimus enim ejuſmodi, eſt terminus ab unitate (ut dictum ſupra) 257us excluſivè; ac proinde numerus ingens, qui primus an ſit, longiſſimi laboris eſt diſcernere. Sanè, ſi 20 notis conſtet numerus, Merſennus aſſerit, huic examini ne integrum quidem ſæculum ſufficere, quocunque modo hactenus cognito utaris.

ARITHMETICA PRACTICA

LIBRIS QUINQUE

XPLICATA AC DEMONSTRATA

AB

ANDREA TACQUET

ANTVERPIENSI,

E SOCIETATE JESU,

MATHESEOS

PROFESSORE.

AD
LECTOREM.

Quid potiſſimum hoc in opere ſpectaverim, initio præfatus ſum; nimirum ut Arithmeticæ praxim univerſam & clarè breviterque exponerem, & (quod nullus huc uſque fecit) demonſtrarem. Quia porrò quod in tribus elementorum libris compendio (ut opinor) non ſpernendo jam feci, logiſticæ ſpecioſæ rudimentis primis non ſemel utar etiam hîc, revocanda in memoriam erunt ea, quæ habentur ante elementorum librum, nobis primum, Euclidi ſeptimum; quibus hoc jam accedet unum, quod fractiones etiam ſpecioſas ſubinde adhibebimus. Nihil eſt tamen, quod difficultatem hìc aliquam ſibi quiſpiam imaginetur, cùm operationes earum à communium fractionum operationibus in nullo diſferant.

In citandis elementorum Arithmeticorum libris Euclidis ordinem retinui. Quare cùm citatur ſeptimus, adeundus eſt primus noſter hic, & ſic de duobus reliquis: primus numerus propoſitionem, ſecundus librum deſignat.

ARITH-

ARITHMETICÆ PRACTICÆ.

LIBER PRIMUS.

LOGISTICA Integrorum Numerorum.

IN omni numero pluribus notis conſtante, ea nota, quæ maximè dextra eſt, prima dicetur, ultima verò, quæ maximè ſiniſtra.

CAPUT I.

Notarum Arithmeticarum Inſtitutio.

DEcem notæ ſeu characteres ſunt, (alii digitos, alii figuras appellant) quibus omnes numeri exprimuntur.

o. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1.

Prima nota (1) unitatem ſignificat; 2, ſignificat unitates duas; 3, unitates tres; 4, unitates quatuor, & ſic deinceps.

Poſtrema, o, quæ cyfra dicitur, nihil ſignificat, ſed aliis notis præpoſita, earum auget valorem, ut mox dicemus.

Præter hunc valorem ſimplicem notæ jam dictum, alium inſuper habent ratione loci, quem ſingulæ occupant. Porrò locorum valor creſcit ſecundùm proportionem decuplam in infinitum continuatam. Itaque nota quælibet primo loco poſita ſignificat (ut dictum eſt) unitates; poſita ſecundo loco ſignificat tot decades, quot habet unitates:

tates:

tates: tertio loco, tot centenas; quarto loco, tot millia: quinto loco, tot dena millia; ſexto, tot centena millia: ſeptimo, tot mille millia, ſeu decies centena millia, ſeu milliones, quot unitates habet, atque ita deinceps ſequentium locorum valor in proportione decupla in infinitum procedit.

Eſto numerus A: prima hujus nota 6 ſignificat ſex unitates: ſecunda 9, valet novem decades unitatum hoc eſt (90) nonaginta: tertia 7 valet ſeptem centenas, hoc eſt (700) ſeptingenta: quarta 5, valet quinque millia (5000): quinta 3, valet tres decades millium ſeu ter dena millia, hoc eſt (30000) triginta millia: ſexta 8 valet octo centenas millium, hoc eſt (800000) octingenta millia: ſeptima 1, valet unum millionem ſeu mille millia, ſeu decies centena millia (1000000): octava 4, valet quadraginta milliones (40000000.)

A. 4 1 8 3 5 7 9 6.

9 0. Nonaginta.
7 0 0. Septingenta.
5 0 0 0. Quinque millia.
3 0 0 0 0. Triginta millia.
8 0 0 0 0 0. Octingenta millia.

1 0 0 0 0 0 0. Mille millia, ſeu millio.
4 0 0 0 0 0 0 0. Quadraginta milliones.

1 Unitas.
1 0 Decem.
1 0 0 Centum.
1 0 0 0 Mille.
1 0 0 0 0 Decem millia.
1 0 0 0 0 0 Centum millia.

LO-

LOCUS	VALOR.
Primus	Unitates
Secundus	Decades
Tertius	Centenæ
Quartus	Millia
Quintus	Decades millium
Sextus	Centenæ millium
Septimus	Milliones
Octavus	Decades millionum
Nonus	Centenæ millionum
Decimus	Millia millionum
Undecimus	Decades millium millionum
Duodecim.	Centenæ millium millionum
13*us*	Milliones millionum ſive biliones
14*us*	Decades bilionum
15*us*	Centenæ bilionum
16*us*	Millia bilionum
17*us*	Decades millium bilionum
18*us*	Centenæ millium bilionum
19*us*	Milliones bilionum ſive triliones
20*us*	Decades trilionum
21*us*	Centenæ trilionum
22*us*	Millia trilionum
23*us*	Decades millium trilionum
24*us*	Centenæ millium trilionum
25*us*	Milliones trilionum ſive quatriliones
Etc.	Etc.

Porro

Porrò ſingulorum locorum valor tabellâ hîc appoſitâ exhibetur, quam viſum eſt commodiſſimum ita partiri, ut ſingula quaſi membra, locorum ſenarii ſinguli conſtituerent. In ſecundo igitur ſenario ſeu membro ſunt milliones; in tertio biliones; in quarto triliones; in quinto quatriliones. Atque ita in infinitum. *Valor enim cujuſvis membri ſeu ſenarii, à numero membrorum ſeu ſenariorum præcedentium denominabitur.* Ut ſi quæris valorem ſenarii ſeptimi, is erit ſextilio, quia ſeptimum ſenarium ſex ſenarii præcedunt.

Si magis placet valorem membrorum per ſolos milliones exprimere, toties itera vocem *millio*, quot ſunt membra præcedentia. Ut ſi quæratur quis ſit valor in quarto ſenario, oportet tertiò dicere millio, quia quartum ſenarium tres ſenarii, ſeu membra antecedunt. Itaque valor quarti ſenarii eſt millio millionis millionis.

CAPUT II.

Numeratio.

Docet Numeratio datum numerum ſcribere & enuntiare. Utrumque facili negotio perficiet is, qui notarum numeratum valorem, tum ſimplicem, tum loci potiſſimum, primo capite explicatum rectè perceperit. Sed quia in magnis numeris proclive eſt ut hæreant, etiam periti, variæ praxes huic rei facilitandæ ſunt excogitatæ. Nos hîc eam dabimus, quæ viſa eſt inter cæteras expeditior.

Ante omnia dabit operam tyro arithmeticus,

cus, ut expeditè ſcribat ac enunciet primi ſenarii locos, hoc eſt numeros conſtantes notis vel, ſex, vel quinque vel quatuor, &c.

In quo juvabitur hâc praxi. Pronuntiandi dentur numeri, A, B, C. Poſt tres primas notas comma interpone, ut duo quaſi membra exiſtant, ſive ſecundum tribus conſtet notis, ſive paucioribus. Pronuntia deinde ſecundum membrum, tanquam ſi eſſet ſolum; ſed adde ſemel hanc vocem *mille* vel *millia*; primum verò membrum pronuntia, ut jacet. Datos igitur numeros A, B, C, ita enunciabis.

370, 517.	A
49, 304.	B
7, 059.	C

A. Trecenta ſeptuaginta millia, quingenta decem & ſeptem.

B. Quadraginta novem millia, trecenta & quatuor.

C. Septem millia, quinquaginta novem.

Hoc præmiſſo: numerus enuntiandus eſto quantumvis magnus.

D.

96, 638 (908, 003 (030, 460 (243, 709.

Poſt ſex quaſque notas à dextris incipiendo, lunulâ aut virgulâ interpoſitâ, numerum partire in quædam quaſi membra, quorum ſingula ſenis conſtabunt notis, dempto ultimo, quod conſtare poteſt paucioribus, imo unicâ. Tum ſingula membra, à ſiniſtris incipiendo, pronuncia, (ut jam docui) ac ſi eſſent ſola, ſed adjunge ſingulis valorem ipſis competentem, quem ſubjecta tabella indicat.

MEMB.

MEMB.	*VALOR.*	*MEMB.*	*VALOR.*
Primum.		Septimum.	Sextilio
Secundum	Millio	Octavum.	Septilio
Tertium	Bilio	Nonum	Octilio
Quartum	Trilio	Etc.	Etc.
Quintum	Quatrilio		
Sextum	Quintilio.		

Numerus igitur D ſic pronuntiabitur.

Membr. 4.

Nonaginta ſex millia, ſexcenti triginta octò triliones.

Membr. 3.

Nongenta octo millia & tres biliones.

Membr. 2.

Triginta millia, quadringenti, ſexaginta milliones.

Membr. 1.

Ducenta quadraginta tria millia, ſeptingenta, novem.

Cùm numerus multas ad dextram & non interruptas habet cifras, brevior eſt pronuntiatio. Ut ſi detur Numerus E.

E.

1 (000000(000000(000000(000000(000000 (000000.

(major is eſt, numero arenarum orbem terræ componentium) quoniam is ultimum, hoc eſt ſeptimum membrum conſtans unitate, ſolum habet ſignificativum, cum totum pronuntiaveris dicendo; unus ſextilio.

Quod ſi miſſis bilionum ac trilionum vocibus, malis per ſolos milliones enuntiare, eâdem

partitione factâ, quæ ſupra, pronuntia membra ſingula ac ſi eſſent ſola, toties adjunctâ voce *millio*, quot membrum enuntiandum alia membra antecedunt. Itaque numerus D per milliones ſic pronuntiabitur.

Membr. 4.
96, 638 Milliones millionum, millionum.
Membr. 3.
908, 003 Milliones millionum.
Membr. 2.
030, 460. Milliones.
Membr. 1.
243, 709.

Numerus verò E pronuntiabitur hunc in modum; unus millio millionum millionum millionum millionum. Prior modus brevior & expeditior eſt, alter uſitatior.

Omnium facillima, at cæteris longior, eſt enuntiatio per ſola millia. Poſt ſingulas ternas notas, initio facto à dextris, interpone comma; tum membra ſingula, incipiendo à ſiniſtris, ita pronuntia ac ſi eſſent ſola, ſed toties adjunge hànc vocem *mille* vel *millies*, quot membrum enuntiandum alia membra antecedunt. Datus ſit numerus F enuntiandus per millia. Membrum ultimum eſt 96*ies* millies millies millena millia: penultimum, 638*ies* millies millena millia.

F 96, 638, 000, 000, 000.

Ratio horum omnium ex capite primo eſt manifeſta.

Scriptio dati numeri nullo negotio perficitur ſubſidio tabellæ capitis præcedentis. Scribendus eſto

eſto hic numerus, *quadraginta quinque milliones, ſeptem millia.*

In tabella reperies decades millionum obtinere locum octavum, milliones ſeptimum, millia quartum; ſcribe igitur 4 loco octavo: 5 ſeptimo: 7, quarto. Et loca vacua cifris reple. 45: 007, 000.

CAPUT III.

Poriſmata quædam, ex quibus pendent rationes operationum logiſticarum.

PORISMA I.

A 243	243	0
	243	00
	243	000

SI numero (A) pluribus notis conſtanti præponatur una nota, illius valor augetur in decuplum; ſi duæ, in centuplum; ſi tres, in millecuplum, & ſic deinceps ſemper in proportione decupla.

Demonſtratio. Cùm enim toti numero A præponitur una nota (cifræ quaſlibet hìc notas repræſentant) ſingulæ ejus notæ ad unum locum promoventur, ſic ut 3 jam ſecundo conſiſtat loco; 4, tertio; 2, quarto; ac proinde ſingularum valor augetur in decuplum, ut patet ex primâ notarum arithmeticarum inſtitutionè capite primo expoſitâ. Ergo valor totius numeri A augetur in decuplum. Similiter cùm numero A

duæ notæ præponuntur, aſcendunt ſingulæ duo loca. Ergo valor ſingularum, ac proinde etiam numeri totius A, augetur in centuplum. Et ſic deinceps.

Corollarium. Hinc patet ſi ante duos numeros *a* & *b* ponantur æquè multæ cifræ, ut fiant *c* & *d*, fore *c* & *d* ipſorum *a* & *b* æquè multiplices. Si enim præponatur ſingulis una cyfra, erunt pariter *c*, & *d* ipſorum *a* & *b* decupli; ſi duæ cyfræ, ambo centupli, & ſic deinceps.

a.	32.	3200.
b.	7.	700.

PORISMA II.

1000	A
999	B

Duorum numerorum ille major eſt qui pluribus notis conſtat.

Patet ex primâ inſtitutione notarum. Sic A major eſt quàm B.

PORISMA III.

C.	2000
D.	1999

Numerorum æquè multis notis conſtantium ille major eſt, cujus poſtrema nota major eſt.

C	34299
D	34390

Sic C major eſt quàm D. Patet ex inſtitutione prima notarum numeralium.

PORISMA IV.

A	2999	
B	2000	
E	2000	0

Si duo inæquales numeri A, B æquè multis notis conſtent continebitur minor in majore minùs quàm decies.

D

Demonſtratio. Adjiciatur enim minori B una cifra, & fiat E. Per poriſma 2, E major eſt quàm A. Sed E præcisè decuplus eſt dati minoris B per poriſma 1. Ergo A non eſt decuplus dati B. Quod erat demonſtrandum.

A	2999
B	2000
E	2000 | 0

PORISMA V.

A	2999
B	300
E	300 | 0

Dati ſint numeri A major, B minor; & major A ſuperet minorem B unâ notâ, ſed minoris B nota ultima (3) ſit major notâ ultimâ majoris A. Dico minorem B in majori A contineri minùs quàm decies.

Demonſtratio. Adjiciatur enim minori B una cifra & fiat E. Per poriſma 3, E major erit quàm A, Sed E præcisè decuplus eſt dati minoris B per poriſma 1. Ergo A minor eſt quàm decuplus ipſius B. Quod erat demonſtrandum.

PORISMA VI.

Dati ſint duo numeri A, & B. Si prima unius nota c *multiplicet aliquam numeri alterius notam* d *primâ altiorem, ſed acceptam ſimpliciter, & productum* e *ad locum notæ* d *attollatur, tot videlicet notis ante ipſum poſitis, quot ſunt ante* d, *ut fiat* f; *Dico* f *eſſe verum productum, quod fit ex nota* c *multiplicante notam* d *ſecundùm loci valorem æſtimatam:*

d	
3,042.	A
c	
517	B
e. 21	
f. 21.000	

Demonſtratio. Nota *d* ſecundùm loci valorem æſtimata, eſto *g*. Tum *c* multiplicans *g*, faciat *z*. Oſtendendum eſt *f* eſſe *z*. Quoniam *c* multiplicans numeros *d* & *g* genuit numeros *e* & *z*, per 17. 7, ut *d* eſt ad *g*, ita *e* eſt ad *z*. Atqui etiam ut *d* ad *g*, ita *e* eſt ad *f* (cùm enim *g* & *f* ſint ipſi numeri *d* & *e*, ſed æqualiter ſublimati, hoc eſt æquè multas ante ſe notas per hypotheſim habentes, patet ex poriſmatis 1. corollario *g*, & *f* ipſarum *d* & *e* eſſe æquè multiplices.) Ergo *e* ad *z* & ad *f* eandem habet proportionem. Ergo per 9. 5. *z* & *f* ſunt æquales. Quod erat demonſtrandum.

d 3	3,000.	*g*
c 7	7	
e 21	*z*——	
	f 21,000.	

PORISMA VII.

Dati rurſum ſint duo numeri A *&* B. *Si duæ quælibet utriuſque numeri notæ* k, *&* d *invicem multiplicent ſimpliciter acceptæ, & productum* c *attollatur ad locum ex notarum multiplicantium locis compoſitum, tot videlicet notis ante* c *poſitis, quot utramque* k *&* d *antecedunt. Dico haberi* (f) *productum verum, quod ſit ex notis* k , *&* d *juxta loci valorem æſtimatis.*

d	
3,042.	A
k	
5,17.	B
———	———
c. 15	m. 15,000
f. 15,000,00	

Demonſtratio.	k. 5	5,00. h
Notæ *k* & *d* ſe-	g. 3,000.	
cundùm loci va-	c	c
lorem eſtimatæ	m. 15,000.	15,000,00. f
ſint *h* & *g*. Tum		z———
h in *g* ſit *z*. O-		

ſtendendum eſt *f* eſſe *z*. Ante *c* productum ex *k* in *d* ponantur tot notæ, quot antecedunt notam *d*, & fiat *m*. Erit per poriſma præcedens *m* productum ex *k* in notam *d* ex loco æſtimatam, hoc eſt ex *k* in *g*. Deinde quoniam per conſtructionem *m* eſt *c* cùm tot notis ante ſe, quot ſunt in numero A ante *d*; *f* verò per hypotheſim eſt idem *c* ſed cùm tot notis ante ſe, quot in numeris A, & B. antecedunt utramque *d* & *k*, manifeſtum eſt notas, quæ in *f* ponuntur ante *c*, excedere eas, quæ in *m* ſunt ante *c*, tot notis, quot ſunt in B ante *k*, hoc eſt tot notis quot ſunt in *h* ante *k*, cùm *h*, ſit ipſum *k*, ex loco æſtimatum. Ergo per corollarium poriſmatis 1, *h*, & *f* ſunt ipſorum *k*, & *m* æquè multiplices, ac proinde ut *k* eſt ad *h*, ſic *m* eſt ad *f*. Atqui etiam per 18. 7 ut *k* eſt ad *h*, ita *m* eſt ad *z*; nam, ut oſtendi ſupra *k* multiplicans *g* produxit *m*, & per hypotheſim *h* multiplicans *g* genuit *z*. Ergo *m* eodem modo ſe habet ad *f* & ad *z*. Ergo per 9. 5, *f* & *z* æquales ſunt: quod erat demonſtrandum.

Ex hoc poriſmate & præcedenti multiplicatio demonſtrabitur capite 7.

PORISMA VIII.

Dati ſint duo numeri A B, & C: ſi C dividat membrum A ſim-	A, B 360,5897	60. C 6. d 6,0000. f

pliciter acceptum, & quotiens d *attollatur ad locum membri A, hoc eſt ponantur ante* d *tot notæ, quot ſunt ante membrum A, ut fiat* f. *Dico* f *eſſe quotientem verum, qui habetur ex membro A æſtimato ſecundùm loci valorem, diviſo per* C.

Demonſtratio membrum A juxta loci valorem æſtimatum eſto *g*. Tum C dividens *g* faciat quotientem *z*. Oſtendendum eſt *f* eſſe *z*. Quoniam C dividens numeros A, & *g* genuit quotientes *d*,	A 360 d.6.	g 360,0000 C 60 6,0000. f z.———

& *z*, erit per corol. p. 18. l. 7. ut A ad *g*, ita *d* ad *z*. Atqui etiam eſt ut A ad *g*, ita *d* ad *f*; (cùm enim *g* & *f* ſint ipſi numeri A & *d* ad æqualem locum ſublimati, hoc eſt, æquè multas per hypotheſim notas ante ſe habentes, patet ex corollario poriſmatis 1, *g* & *f* ipſorum A & *d* eſſe æquè multiplices.) Ergo *d* eodem modo ſe habet ad *f* & ad *z*. Ergo per 9. 5. *f* eſt *z*. Quod erat demonſtrandum.

Ex hoc poriſmate diviſio demonſtrabitur capite 9.

PORISMA IX.

O*Perationum logiſticarum , hoc eſt additionis , ſubtractionis , multiplicationis , diviſionis artificium in eo poſitum eſt , quòd tantiſper , dum operamur , loci valore neglecto, notæ accipiantur juxta valorem ſimplicem , ſic tamen ut ſummæ in additione , reſidua in ſubtractione , producta in multiplicatione , quotientes in diviſione ſuis quæque reponantur locis : quo ſit ut valor ſingulis ex loco debitus reſtituatur.*

PORISMA X.

N*Ota ſimplex quemcunque numerum multiplicans , aut dividens , non niſi unicâ notâ, ſeu loco eum auget , minuitve.*

$$\begin{array}{r} A,365 \\ 10 \\ \hline 3650 \end{array}$$

Detur numerus A quicunque. Hìc multiplicatus per 10 non niſi uno gradu, ſeu loco attollitur,

$$A\ 365 \qquad 10 \;\Big(\; 36\tfrac{5}{10}$$

ut patet ex 1. poriſmate. Ergo neque multiplicatus per notam ſimplicem attolletur altiùs gradu uno.

Rurſum 10 dividens datum A , eum non deprimit infra gradum unum. Ergò neque nota ſimplex : quò enim diviſor eſt minor , eò quotiens major eſt.

CAPUT IV.

Additio.

ADditio eſt plurium numerorum in unam ſummam collectio.

PRAXIS.

	97063. A
	8002. B
	5041. C
	110106. D

DAti ſint numeri A, B, C, in unam ſummam colligendi.

Ita ſcribantur, ut primæ notæ reſpondeant primis (hoc eſt unitates unitatibus); ſecundæ ſecundis (hoc eſt decades decadibus); tertiæ tertiis, (hoc eſt centenæ centenis) & ſic deinceps.

Subductâ deinde lineâ, notæ primi loci addantur, & ſi numerus ex his compoſitus unicâ notâ conſtet, ea primo loco infra lineam ſcribatur: Si verò duabus conſtet, ſola earum prima infra lineam ſcribetur, altera reſervabitur, ſequenti loco reponenda; ſi tribus (quod rarius accidit) ſecunda ad ſecundum, tertia ad tertium locum pertinebit.

Poſt hæc addantur notæ ſecundi loci, unà cum illâ, quæ fuerat reſervata, numeruſque ex his compoſitus ſcribatur infra lineam ſecundo loco, juxta cautionem jam traditam. Atque eundem planè in modum locorum cæterorum additio peragetur.

Exemplo præcepta fient clariora.

Exem-

Exemplum.

PRimi loci notæ 1, 2, 3 faciunt 6, quæ ſcribo infra lineam.

Notæ ſecundi loci 4, 0, 6 faciunt 10, qui numerus, quia duabus notis conſtat, primam 0, infra lineam ſcribo; ſecundam 1, ſervo tertio loco reponendam.

97063.	A
8002.	B
5041.	C
110106.	D

Loco tertio nullam reperio notam ſignificativam. Notam igitur ſervatam 1, infra lineam ſcribo in loco tertio.

In quarto loco reperio 5, 8, 7 quæ ſimul efficiunt 20; qui numerus quia binis conſtat notis, primam 0 ſcribo infra lineam quarto loco; ſecundam verò 2 ſervo ſequenti loco.

In loco quinto reperio 9, cui addo notam ſervatam 2, & fiunt, 11, quæ ut jacent, quinto & ſexto loco ſubſcribo. Atque ita operatione totâ peractâ provenit numerus D, ſumma datorum, A, B, C.

Si multi fuerint numerorum addendorum ordines, expediet lineis interpoſitis in tres quatuorve eos claſſes dividere, & ex ſingulis claſſibus ſingulas ſummas colligere, quæ deinde ad unam redactæ, ſummam ſummarum exhibeant.

Demonſtratio.

COlligitur ex poriſmate 9. cap. 3. Quamvis enim in operatione notarum valor localis neglectus tantiſper fuerit, is tamen fuit reſtitutus, dum ſingulorum locorum ſummæ ſuis quæque locis fuêre collocatæ, ut ex operatione ipsâ manifeſtum eſt.

SPE-

SPECIES DIVERSÆ.

Libr.	Flo.	Aſſ.
8	7	5
5	3	6
2	8	9
3	2	8
21.	3.	8.

SI addendæ ſint ſpecies diverſæ, ut libræ, floreni, aſſes, ſimilia ſub ſimilibus ſcribe, & minimam ſpeciem (nempe aſſes) primo loco, tum ordine reliquas. Deinde à minimæ ſpeciei ſummâ, quæ hîc eſt aſſes 28, abjice ſpeciem ſequentem, nempe florenum, quoties potes, & reſiduum ſcribe infra lineam ſub aſſibus; quod verò abjectum fuit, hîc nempe florenus, 1, ſervetur addendum ſpeciei ſequenti, nempe florenis.

Proxima ſpecies in unum collecta facit florenos 20, quibus ſi addamus unum à priori ſpecie abjectum, fiunt floreni 21. Ab his abjici poſſunt tres libræ, quas addo ſpeciei ſequenti, libris videlicet, & reſiduos florenos 3. florenis ſubſcribo.

Tertiæ ſpeciei ſumma eſt libræ 18. quibus adde 3 ex priori ſpecie abjectas, & fiunt libræ 21, quas libris ſubſcribe. Ergo ſumma eſt lib. 21. Flor. 3. Aſſ. 8.

Eâdem methodo addi poſſunt gradus, minuta prima, ſecunda, tertia &c.

CAPUT V.

Subtractio.

DOcet minorem numerum à majori ſubtrahere & reſiduum exhibere. Duplex verò eſt modus, quo minor numerus à majori ſubtrahitur.

PRA-

PRAXIS MODI I.

MInor numerus ſcribatur ſub majore, ſic ut primæ notæ primis, ſecundæ ſecundis, & ſic deinceps, reſpondeant.

Subductâ deinde lineâ, primam inferiorem notam aufer à prima ſuperiore, & reſiduum ſcribe infra lineam primo loco. Tum ſecundam aufer ex ſecunda, & reſiduum ſubſcribe ſecundo loco, & ſic deinceps.

Quod ſi in ſuperiori numero reſtent aliquæ notæ, quibus nullæ reſpondeant numeri inferioris, etiam illæ infra lineam ſcribantur.

Si autem nota aliqua inferior ſit major ſuperiore, ad ſuperiorem mente adjicies decem. Tum verò proxima ad ſiniſtram nota ſignificativa ſuperioris numeri, æſtimanda eſt minor unitate, quàm reverâ ſit: & ſi intermediæ eſſent cifræ una vel plures, omnes illæ ad notam ſignificativam uſque æſtimandæ erunt tanquam 9.

Exempla.

496.	A
75.	B
421.	C

1. ESto B auferendus ab A. Aufer 5 ex 6; reſtat, 1, quod ſcribe infra lineam. Tum 7 aufer ex 9: reſtant 2, quæ ſubſcribe ſecundo loco. Supereſt in ſuperiori numero nota 4, cui nulla reſpondet in numero inferiore. Subſcribe igitur 4 loco tertio. Reſiduum quæſitum eſt C.

3004.	D
2578.	E
426.	F

2. Detur E auferendus ex D. Quia 8 ex 4 auferri nequit, ad 4 mente adjicio decem, atque ita 8 aufero ex 14: reſtant 6 quæ ſubſcribo. Quia verò ad 4 adjeci decem mutuata à numero

ſequente,

ſequente, proximam notam ſignificantem 3 reputabimus ut 2, & cifras intermedias, ut totidem 9. Aufero igitur 7 ex 9, & reſiduum 2 ſubſcribo. Tum 5 aufero ſimiliter ex 9, & reſiduum 4 ſubſcribo. Tandem 2 aufero non ex 3, ſed ex 2, & nihil reſtat. Reliquum igitur quæſitum eſt F.

3. Oporteat H auferre ex G. Quia 9 ex 3 auferri nequit, adjectis mente 10 ad 3, ſubduco 9 ex 13. & reſiduum ſubſcribo. Quapropter 5 fit 4 & 00 vertuntur in 99. Ergo 6 aufero ex 9, & reſiduum 3 ſubſcribo. Tum, quia nullæ notæ inferioris numeri H ſuperſunt auferendæ, reliquas ſuperioris, quæ jam ſunt, non 850, ſed 849, ſubſcribo. Erit I quæſitum reſiduum.

85003	G
69	H
84934.	I.

4. Quia 3 nequit auferri ex, 0, adjectis mente 10 ad 0, aufero 3 ex 10, & remanent 7. Tum verò quia in majore numero K nota proxima ſignificativa eſt, 1, ea evaneſcit, & cyfræ intermediæ vertuntur in 9, à quibus ſubtrahes ut ſuprà.

100000.	K
51243.	L
48757.	M

Demonſtratio Modi 1.

QUod in reſiduorum ſcriptione locorum valor ſervatus ſit, ex operatione ipſa patet. Solùm reſtat ut declaremus id, quod mirum videri ſolet tyronibus, quare nota ſignificativa ad ſiniſtram proxima, minuatur unitate, & cifræ, ſiquæ fuerint mediæ, in totidem 9 commutentur, quando nota inferior demi nequit ex ſuperiore. Inſpiciatur ſecundum exemplum D, E, F. Quia 8 demi nequit ex 4, ad 4 adjicio decem

3004. D cem mutuata à ſequente numero,
1578. E qui eſt tria millia. Liquet autem
——— cùm à tribus millibus ſubduco de-
426. F cem, remanere duo millia, nongen-
ta, nonaginta, quæ quia arithmeticè exprimuntur hiſce notis 2990, patet, quare in ſuperiori numero, 3 vertantur in 2, & cifræ 00 in 99.

D.	3004	96
E.	2578	91
F.	426	05

At dicet quiſpiam, ſi ante numeri D primam notam 4 ponerentur aliæ duæ, 9, 6, & ante numeri E primam 8, duæ 9, 1, & tunc 4 valeret 400, & 8 valeret 800, ac proinde ut 800 auferri poſſint ex 400, adjicienda eſſent non decem ſed mille, ut ſic 800 ex 1400 ſubducantur. Verùm reſpondeo eôdem recidere, ſive 8 auferas ex 14, ſive 800 ex 1400, quia reſiduum 6 ſcribitur infra lineam eo loco, qui debetur notis 4 & 8, nempe tertio: undè fit ut reſiduum 6 eo loco poſitum valeat 600, quantum nempe ſupereſſet, ſi 800 ex 1400 ſubducerentur.

Modi 2. *Praxis.*

HÆc in eo tantùm à priore differt, quòd quando nota inferior auferri nequit à ſuperiore, ac proinde illi decem adjiciuntur, nullâ in ſuperioribus notis ſequentibus mutatione factâ, ſequens inferior nota unitate augeatur; aut certè, ſi nulla nota ſignificativa ſequatur, in loco ſequenti unitas reponatur. Res exemplo declarabitur.

Exem-

Exemplum.

8068. K	
-576. L	
———	
7492. M.	

Detur, L, auferendus ex K. 6 ex 8 relinquit 2. 7 ex 6 ſubduci nequit. Adjicio ergo 10, & 7 demo ex 16: reſtant 9. Jam quia adjeci 10, ſequens nota inferior 5 augenda eſt unitate, & ſic 5 fit 6. Rurſum 6 ex o auferri nequit. Aufero igitur 6 ex 10, & reſtant 4. Quia verò rurſum adjeci 10, repono ſequenti loco, qui vacat, unitatem, quæ ablata ex 8 relinquit 7. Reſiduum ergo quæſitum eſt M.

Hæc methodus expeditior plerumque eſt præcedenti; quæ tamen commodior erit, cùm in majore numero plures occurrent cyfræ continuæ.

Demonſtratio Modi 2.

E——A——L——B
I——C——F

DEntur binæ quantitates AB major, CF minor, quæ ambæ æqualibus quantitatibus EA, IC augeantur. Si IF auferas ex EB, idem erit reſiduum LB, quod fuiſſet, CF ablato ex AB. Hoc ſi numeris applicetur, operationis ratio continuò eluceſcet. Nam ſuperiori notæ 6 adjicere decem ſic ut fiat 16, nihil eſt aliud, quàm ſequenti poſt illam loco (qui hìc tertius eſt) apponere unitatem. Quare cùm etiam loco notam inferiorem, 7, ſequenti, qui & ipſe tertius hìc eſt, apponatur unitas, manifeſtum eſt utrumque numerum æqualiter augeri, ac proinde reſiduum hac ratione obtentum, illud ipſum eſſe, quod numero L, à numero K ſubducto remanet.

SPECIES

Inst

A D es.

1	2	3
2	4	6
3	6	9
4	8	12
5	10	15
6	12	18
7	14	21
8	16	24
9	18	27

B E

3
8
—
5

i ex
icio
re-
(u-
lor.
, &
, re-
24
bræ.
pri-

X

1	5	9
2	1/0	1/8
3	1/5	2/7
4	2/0	3/6
5	2/5	4/5
6	3/0	5/4
7	3/5	6/3
8	4/0	7/2
9	4/5	8/1

mi-

citur,
abet,
, 2, 3,
gulo-
uſque
urque

2,5375 Quod

C

4	5	6	7	8	9
8	10	12	14	16	18
12	15	18	21	24	27
16	20	24	28	32	36
20	25	30	35	40	45
24	30	36	42	48	54
28	35	42	49	56	63
32	40	48	56	64	72
36	45	54	63	72	81

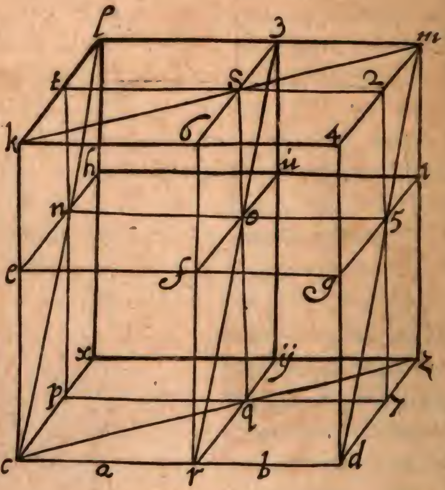
A

/1	/2
/2	/4
/3	/6
/4	/8
/5	1/0
/6	1/2
/7	1/4
/8	1/6
/9	1/8

B

/7
1/4
2/1
2/8
3/5
4/2
4/9
5/6
6/3

:A



SPECIES DIVERSÆ.

UT libræ, floreni, aſſes, ſi offerantur, minor ſumma ſubſcribatur majori, ſic ut ſimilia ſimilibus reſpondeant: & ſi ſimile à ſimili ſubtrahi nequeat, à ſpecie majori proximâ unum mutuetur.

Lib.	Flor.	Aſſes.
25	12	13
10	14	18
14	4	15

Exemplum. 18 aſſes, quia nequeunt auferri ex 13. à florenis 12 unum mutuò, acceptum adjicio ad 13. aſſes, & fiunt 33. Jam 18 ex 33 ablati relinquunt 15. Rurſum quia 14 floreni ex 11 (unum quippe ſuſtulimus) demi nequeunt, ad flor. 12 adjicio 1 libram mutuatam à libris 25, & fiunt floreni 18; à quibus ſi ſubducantur 14, remanent 4. Poſtremò 10 libras ſubduco ex 24 (nam una mutuò data eſt,) & reſtant 14. libræ.

Simili ratione ſubtrahentur gradus, minuta prima, ſecunda, &c.

CAPUT VI.

Tabula Pythagorica multiplicationi diviſionique inſerviens.

ABacus, qui ab auctore Pythagoricus dicitur, in vertice ſeu ſupremo ordine A, C habet, novem primordiales notas arithmeticas, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9: & ſub ſingulis ponitur ſingulorum duplum, triplum, quadruplum, &c. uſque ad noncuplum. Uſus eſt eximius, tradeturque cap. 7, & 9.

Quod ſi hujus abaci columnæ AB, DE, &c. ab invicem ſeparentur, ut poſſint inter ſeſe quovis ordine permiſceri, multiplicationis ac diviſionis compendium admirabile exhibebitur. Hanc tabulæ Pythagoricæ diſſectionem primus excogitavit, adhibuitque Joannes Nepperus Baro Merchiſtonius, tum hoc invento ſuo, tum logarithmis à ſe itidem excogitatis, de Matheſi præclarè meritus.

Porrò hujus abaci diſſecti ſive mobilis conſtructio eſt hujuſmodi. Præparentur ex ære, chartâ ſolidâ, aut aliâ quavis materiâ idoneâ laminæ plures oblongæ & tenues (AB) quæ dividantur in novem quadrata æqualia, & quadrata ſingula ductis diametris in duo triangula ſecentur, ſic ut inferius triangulum (BNP) ad dextram ſit. Primæ laminæ inſcribatur prima columna tabulæ Pythagoricæ, nempe, 1, 2, 3, 4, &c. & in altera ejus facie, columna ſecunda, 2, 4, 6, 8, &c. In ſecunda lamina deſcribatur columna tertia tabulæ Pythagoricæ, 3, 6, 9, 12, &c. In altera verò ejuſdem facie columna quarta, 4, 8, 12, 16, &c. Et ſic deinceps in reliquis laminis abaci Pythagorici reliquæ columnæ deſcribentur, eâ ſemper lege, ut cùm numerus unicâ notâ conſtat, is reponatur in triangulo inferiori; cùm verò duâbus (exemplum gra. 18) prima nota (8) inſcribatur triangulo inferiori, ſecunda (1) triangulo ſuperiori. Ex ſingulis autem hujuſmodi laminis plures ejuſdem formæ erunt conſtruendæ. Sex uniuſcujuſque formæ ad maximas etiam diviſiones ac multiplicationes peragendas ſufficient. Præter has autem alia inſuper præparanda eſt lamina XZ, quam

quam hic expreſſam vides. Ea reliquis ad ſiniſtram in omni multiplicatione ac diviſione apponitur, ſingulos numerorum ordines denominans, quam proinde ab officio exponentem nominabo.

Harum laminarum primum iſtud atque præcipuum artificium eſt, ex quo uſus reliqui omnes emanant, quòd datum numerum per novem primordiales notas momento penè multiplicatum exhibeat. Datus eſto numerus 597. Laminæ hunc numerum gerentes in vertice ſibi mutuò apponantur, præfixâ ad lævam virgulâ exponente XZ. Stabit igitur in primo ſive ſupremo ordine numerus datus 597, atque infra ipſum alii numerorum ordines octo multiplices primi 597, juxta numeros laminæ exponentis; ut cap. 8. demonſtrabitur.

Modus legendi & exſcribendi ordines numericos laminarum.

TRia obſerva. 1. Primum inferius triangulum, quod nempe ad dextram eſt, conſtituere primum locum; rhombos intermedios ſingulos, loca ſingula intermedia; poſtremum ſuperius triangulum, locum ultimum. Ex quo ſtatim apparet quot notis conſtet numerus quem ordo quilibet laminarum continet. 2. Notas in eodem rhombo exiſtentes (Exempl. gr. in NM) coaleſcere. Quod ſi coaleſcentes, hoc eſt in unum collectæ, numerum efficiant binis notis conſtantem, illius notam ſecundam ad ſequentem rhombum, aut triangulum rejici oportere.

Exemplum. Oporteat ordinem IX deſcribere. In primo triangulo inferiori reperio 3, quæ ſcribo primo loco. In ſequenti rhombo notæ ſunt, 6 & 1, quæ coaleſcentes faciunt 7. Scribo ergo 7 ſecundo loco. In rhombo ſequenti notæ ſunt 8, & 5, quæ coaleſcentes faciunt 13; hujus ſummæ primam notam 3 ſcribo loco tertio; alteram, 1, rejicio ad ſequens ultimum triangulum, ac ad notam iſthic repertam 4, adjicio, & fiunt 5, quæ ſcribo loco quarto. Ordo igitur nonus continet numerum 5373.

Ratio hujus exſcriptionis dabitur in demonſtratione cap. 8.

CAPUT VII.

Multiplicatio.

QUid ſit multiplicatio expoſitum eſt defin. 13. l. 7. qui nobis eſt arithmeticorum primus.

Ut expeditè fiat multiplicatio numerorum pluribus notis conſtantium, prænoſcenda eſt notarum ſimplicium multiplicatio, quæ præſidio tabulæ Pythagoricæ momento abſolvitur. Oporteat multiplicare 7 per 8. In latere AB, quære 7; in latere AC, 8: in concurſu offertur 56, productum ex 7 per 8.

PRAXIS.

DEntur numeri A, B, inter ſe multiplicandi. Si inæquali conſtat notarum numero, eum alteri ſubſcribe qui paucioribus conſtat notis

notis. Tunc prima nota inferioris B multiplicet notas ſingulas ſuperioris A, & producta ſcribe infra lineam à dextra in ſiniſtram, eâ lege, ut ſi productum conſtet duâbus notis, primam ſubſcribas ſervatâ alterâ, quæ ſequenti producto addenda erit.

Pari modo reliquæ notæ inferioris B, multiplicabunt ſingulas notas ſuperioris A; ſed producta ſic ſcribentur, ut producti ſecundi D prima nota, eo loco reponatur, quem habet nota multiplicans (1) hoc eſt ſecundo, producti tertii E nota prima ſtatuatur eo loco, quem habet nota (5) multiplicans, hoc eſt tertio: & ſic deinceps.

Denique producta, C, D, E collige in unam ſummam F. Hæc erit productum quæſitum ex multiplicatione numerorum A, B.

Exemplum.

3042	A
517	B
21294	C
3042.	D
15210..	E
1572714	F

Dentur multiplicandi inter ſe A, & B. Minoris B nota prima 7 multiplicet totum A. 7 in 2 facit 14: primam notam 4 ſcribo infra lineam; alteram nempe, 1, ſervo. 7 in 4 facit 28, quibus addo notam ſervatam, 1, & ſit 29. Scribo 9 ſecundo loco infra lineam, & ſervo 2. 7 in, 0, facit, 0. Ergo notam ſervatam 2 ſubſcribo tertio loco ſolam. 7 in 3 facit 21; quæ ſubſcribo quarto & quinto loco, ut jacent.

Eodem prorſus modo numeri B nota ſecunda, 1, multiplicans totum A, gignet productum D, cujus

3042	A
517	B
21294	C
3042.	D
15210..	E
1572714	F

cujus prima nota 2 ſcribetur ſecundo loco, nimirum infra ipſam ſuam notam multiplicantem quæ eſt, 1. Neque aliter numeri B nota tertia 5 multiplicans totum A, gignet productum E, cujus prima nota, o, ſcribetur loco tertio, nempe infra notam ſuam multiplicantem 5: cæteræ verò locis ordine ſuo conſequentibus reponentur.

Demonſtratio.

MAnifeſta eſt ex poriſm. 6, & 7, cap. 3. Quod enim valorem ſibi ex loco debitum habeant notæ omnes producti primi C, itemque nota prima producti D, & nota prima producti E, patet ex poriſm. 6. Quod verò reliquæ notæ productorum, D & E, valorem quoque habeant ex loco ſibi debitum, patet ex poriſm. 7. Liquida ſanè res erit, ſi operandi ratio jam præſcripta cum poriſmatis jam dictis conferatur.

Multiplicationis Compendia.

1. CUm utriuſque numeri dati, G, H, vel unius tantùm, primæ notæ ſunt cifræ una vel plures non interruptæ, multiplicatio peragetur inter notas ſignificantes ſolas, & producto præponentur omnes cifræ utriuſque numeri.

12000	G
400	H
4800000	K
23	G
5000	H
115000	K

2. Cum

2. Cum datorum unus (M) conſtat unitate & cifris, habetur productum (P) ſi alteri (N) adjiciantur omnes cifræ prioris (M)	2340 N 1000 M ——— 2340000 P
3. Si in numero multiplicante R, una pluresve cifræ mediæ & continuæ occurrant, illis omiſſis per notam ſequentem 5 multiplicabis totum Q. & producti T notam primam 5 ſcribes infra notam ſuam multiplicantem (quæ etiam hîc eſt 5) nimirum quarto loco.	8013 Q 5006 R ——— 48078 S 40065 T ——— 40113078

Horum compendiorum demonſtratio ex iiſdem 6 & 7 poriſ. manifeſta ſimiliter eſt.

SPECIES DIVERSÆ.

UT Libræ, Floreni, Aſſes, prius ad minimam ſpeciem, puta aſſes; reducendæ; reductæ per regulas jam traditas multiplicentur: productum verò ad majorem, quæ placuerit, ſpeciem, ope diviſionis cap. 9. tradendæ reducetur: ut ſi productum ſint 3400 aſſes, dividendo 3400 per 20, reduces ad florenos 170: hos dividendo per 6 reduxeris ad libras 28 cum una tertia, hoc eſt ad lib. 28. Flor. 2.

Eâdem methodo fiet multiplicatio aſtronomica, graduum videlicet, minutorum primorum, ſecundorum &c.

Scholium.

MUltiplicatio à ſiniſtra in dextram uſum habet non levem in diviſione. Fit hunc in modum. 1. Nulla nota reſervatur, id enim commodiùs. 2. Si nota ultima multiplicatione peractâ, ex multiplicationibus reliquorum productum ali-	183 6 ——— 688 41 ——— 1098

quod oriatur duabus notis ſcribendum, ejus nota ſiniſtra ſcribatur infra eam quæ in priori producto eſt prima ſeu dextra	183 6
Oporteat 183 ducere in 6 6 in 1 eſt 6. Scribo ergo 6 infra lineam. 6 in 8 eſt 48. Quia hoc productum conſtat duabus notis, ſiniſtram 4, ſcribo infra 6, & 8 ante 6. 6 in 3 eſt 18. Rurſus, 1, ſcribo infra 8, & 8 ante 8. Factâ igitur additione productum quæſitum eſt 1098. Demonſtratio ex ſupra dictis colligitur.	688 41 1098

CAPUT VIII.

Multiplicatio expeditiſſima per laminas tabulæ Pythagoricæ.

LAminarum conſtructio tradita eſt cap. 6, jam uſus earum planè eximius deinceps exponetur.

PRAXIS.

A.	597	
B	48	
	4776	C
	2388	D
	28656	E

DEntur numeri A, B inter ſe multiplicandi. 1. Quærantur laminæ, quæ dati majoris A notas habent in vertice, & ſibi mutuo apponantur adjectâ ad lævam laminâ exponente XZ, *a* ſic ut in primo ac ſupremo ordine ſtet numerus datus A.

a tabellam vide. c. 6.

2. Minoris dati B notam primam 8 quære in lamina exponente X Z, ordinemque illi reſponden-

dentem, octavum nempe, exſcribe, infraque lineam repone, & ſit C. Pari modo numeri B notam ſecundam 4 quære in lamina exponente, ordinemque illi reſpondentem, nempe quartum, deſcribe, ſitque D. Sed prima ejus nota 8 ſcribenda eſt infra ſecundam producti primi C. Quod ſi numerus B plures haberet notas, eæ ſimiliter in exponente lamina repertæ, exſcribendos numerorum ordines reliquos indicarent.

3. Producta demum C, D in unam collecta ſummam E, multiplicationis A per B productum quæſitum exhibebunt.

Demonſtratio.

Facilis eſt, tum ex ipſâ laminarum conſtructione, traditâ cap. 6, tum ex iis quæ de multiplicatione communi demonſtrata ſunt. Numerus enim 56 repertus in laminæ primæ quadrato VIII, eſt octies 7, ac proinde, fit ex 8 in 7. Sed quia 56 duabus conſtat notis, primam 6 quæ in inferiori triangulo eſt, ſcribo infra lineam, alteram verò 5, quæ eſt in triangulo ſuperiori, ſervo. Pari modo numerus 72 in ſecundæ laminæ quadrato VIII repertus, eſt octies 9; ac proinde eſt is qui fit ex 8 in 9. Sed quia 72 duabus notis conſtat, ejus nota ſecunda 7 ad tertium, prima verò 2 ſola ad ſecundum locum pertinet. Ad eundem verò etiam pertinet nota 5 ſervata. Ergo hæ duæ notæ 5 & 2 in unam ſunt colligendæ. 7, quæ ſecundo loco infra lineam ſcribetur. Atque hæc cauſa eſt cur ſemper nota trian-

A.	597	
B	48	
	4776.	C
	2388	D
	28656	E

trianguli ſuperioris, cum nota ſequentis trianguli inferioris coaleſcat, ac proinde cur notæ in eodem rhombo exiſtentes, ad locum eundum pertineant, ſaltem quoad primam aggregati notam. Nam ſi notæ alicujus rhombi collectæ numerum faciant binis notis conſtantem, ſecunda nota ad ſequentem rhombum rejicitur. Poſtremò numerus 40 repertus in VIII quadrato laminæ tertiæ, eſt is qui fit ex 8 in 5: cujus ſola prima nota 0 pertinet ad locum tertium: ad quem quia etiam pertinet nota ſervata 7, in eodem cum, 0, rhombo exiſtens, eæ rurſum debent coaleſcere. Sed quia 0 addito ad 7 manet 7, infra lineam ſcribe 7 loco tertio; alteram verò 4, quæ in ultimo eſt ſuperiori triangulo, quarto loco. Octavus igitur ordo in laminis, hoc eſt numerus ipſe C, eſt is qui fit ex A, 597 ductis in 8 primam notam ipſius B. Pari ratione oſtendam ordinem IV, hoc eſt numerum D, eum eſſe qui fit ex A, 597 in 4, ſecundam notam ipſius B. Ergo eorum ſumma E eſt is, qui fit ex A in totum B. Quod erat demonſtrand.

Laminarum igitur artificium in his duobus conſiſtit. Primò quòd laminæ qualibet componi inter ſe poſſint, ac proinde quivis numerus ſtatui in ſupremo ordine. Secundò quod numeri duabus notis conſtantes, in laminis ita deſcripti ſint, ut prima nota in triangulo inferiori, altera in ſuperiori ſit repoſita. Undè fit, ut quia triangulum quodlibet ſuperius, cum laminæ ſequentis triangulo inferiori unum rhombum conſtituit, nota ſuperior, laminæ præcedentis (quæ ſemper eſt ea ipſa quæ mente reſervanda eſſet) reperiatur in eodem rhombo cum laminæ ſubſequentis notâ inferiori,

riori, ſeu primâ, cum qua debet coaleſcere, ut eodem, quo ipſa, loco ſcribatur.

Cæterùm quàm expedita, facilis, ſecura hæc methodus ſit, uſu ipſo decebitur, quiſquis voluerit experiri.

CAPUT IX.

Diviſio.

QUid ſit diviſio expoſitum eſt defin. 14. lib. 7. qui nobis primus eſt. Duos proponam modos, quorum primus minùs uſitatus eſt, ſed melior; alter uſitatior quidem, ſed implicatior.

PRAXIS MODI I.

NUmerus detur A C dividendus per numerum Z.

1. Ex dividendo accipe tot notas poſtremas, quot conſtat notis diviſor; vel, ſi hæ numerum efficiant diviſore minorem, (ut, in exemplo noſtro accidit, cùm 459 minor ſit quàm Z, 597.) illis unam adhuc appone (0.) Atque ita conſtituitur primum diviſionis membrum A B, quod puncto ſecerne.

```
              Z
a   b   c    597 Diviſ.
4590.9.3.
4179         ( 769
———————        X
d 411.9
  358 2
———————
c  537.3
   537 3
———————
       0
```

2. Vide quoties diviſor Z in membro A B contineatur. Id ſi non appareat, quære ultima diviſoris nota (5) quoties contineatur in ultimis duabus notis membri A B.

Z
a b c 597 *Diviſ.*
4590.93.
4179 (769
(X
d 411.9
3582
e 537.3
5373
o

AB. (Quod ſi diviſor & membrum æquè multis conſtarent notis, quærendum eſſet, quoties diviſoris nota ultima (5) contineatur in membri ultima.) Reperies contineri ſepties. Scribe igitur 7 poſt lunulam. Non licebit autem poſt lunulam ſcribere unquam ſimul plus quàm 9, quia, ut demonſtrabo infra, diviſor in membro nunquam continetur ſæpiùs, quàm novies.

3. Per notam (7) jam in quotiente ſcriptam multiplica totum diviſorem Z, à ſiniſtra in dextram. Productum (4179.) quod membro eſſe debet minus, vel æquale, ipſi membro ſubſcribe, ab eoque aufer, & reſiduum D (411) quod minus ſit oportet diviſore Z, ſcribe infra lineam, ante primam ejus notam puncto adjecto. Hæc omnia ſi ſuccedant, legitima erit nota (7) poſt lunulam in quotiente ſcripta, & primi membri diviſio peracta.

4. Quod ſi nota in quotiente ſcripta diviſorem multiplicans, exhibeat productum membro majus, rejicietur, minori ſubſtitutâ: ſi verò productum exhibeat nimis parvum, quod nimirum, ubi à membro ſubtraxeris, reſiduum det diviſore majus, vel æquale, illâ ſimiliter rejectâ major ſubſtituetur. Examen porrò illud notæ poſt lunulam ſcribendæ expeditius redditur multiplicatione à ſiniſtra in dextram, ut ſuprà præceptum eſt, inſtitutâ.

Ita;

Itaque diviſionis difficultas in hoc potiſſimum conſiſtit, ut talis in quotiente nota ſcribatur, per quam diviſor multiplicatus, à membro ſubduci poſſit, & cùm ſubductus fuerit, reſiduum exiſtat vel nullum vel diviſore minus. Talis enim nota indicabit, quoties diviſor contineatur in membro.

5. Membrorum reliquorum ſimilis eſt diviſio. Ad reſiduum (411) D membri prioris A B, dextrorſum adſcribe notam (9) quæ membrum A B jam diviſum antecedit. Atque ita ſecundum membrum conſtituitur (411. 9.) circa quod eadem operatio inſtituetur, quæ circa primum.

Quæres nimirum quoties diviſor Z in eo contineatur: reperies ſexies; ſcribe ergo 6 poſt lunulam ante 7. Diviſorem multiplica per 6. Productum 3582 membro 412. 9 ſubſcribe, ab eoque ſubtrahe, reſiduo E, 537, infrà lineam repoſito, punctoque ante ipſum notato.

Denique notam (3) qua dextrorſum ſequitur in dividendo AC, reſiduo E 537, adſcribe, ut habeatur membrum tertium 537. 3. Rurſum quære quoties diviſor in tertio membro contineatur. Reperies novies. Igitur 9 quotienti adſcribe. Diviſorem deinde multiplica per 9. Productum 5373, à membro 5373, ſubtrahe, & nihil reſtat.

His peractis abſoluta eſt diviſio tota numeri dati AC per datum Z.

6. Si diviſione peractâ ſuperſit aliquid (ut in exemplo hîc appoſito ſuperſunt 5) reſiduum (5) ſcribe ſupra diviſorem (13) lineolâ interpoſitâ, ut fiat fractio (N) quotiens erit integer nume-

```
5 1.2    13 Diviſ.
3 9
———
1 2.2   (     5
1 1 7   ( 39 ——  N
               13
———
    5
```

rus

rus poſt lunulam ſcriptus, unà cum dicta fractione (N)

7. Si operatione primâ abſolutâ, contingat in ſequentium membrorum aliquo (o. 4.) diviſorem (5) ne ſemel quidem contineri, quotienti poſt lunulam adſcribetur cifra, & membro apponetur adhuc una dividendi nota (5) lineolâ interpoſitâ, ut appareat (o. 4̸ 5) membrum eſſe geminatum, atque ita membrorum numerus appareat.

1 o. 4. 5   5 *Diviſ.*
1 o
———
o. 4̸ 5   (2o9.
4 5
———
o

8. Ut minor numerus per majorem dividatur (ut 3 per 7) ſcribendus minor ſupra majorem, lineolâ interpoſitâ, ut fiat fractio (R) Demonſtrabitur lib 2. cap. 2. theo. 1. corol. 2.

$\frac{3}{7}$ R

Demonſtratio.

Z
a b c   597 *Diviſ.*
4 5 9 o. 9. 3
4 1 7 9   (769
———   X
d 4 1 1. 9
3 5 8 2
———
e 5 3 7. 3
5 3 7 3
———
o

Tot ſcribuntur notæ poſt lunulam, ac proinde tot notis conſtat quotiens X, quot ſunt membra diviſionis, ut ex operatione præſcripta patet. Tot verò ſunt membra, quot notæ in dividendo AC primum membrum A B antecedunt, quod quidem per ſe manifeſtum eſt. Ergo tot notis conſtat quotiens

tiens X, quot notæ primum membrum dividendi antecedunt. Liquet igitur ex poriſm. 8. cap. 3. numeri X poſt lunulam ſcripti notam ultimam 7 verum eſſe primi membri AB quotientem, qui nimirum indicet quoties diviſor Z in primo membro AB contineatur. Pari modo idipſum oſtendam de reliquis notis numeri X poſt lunulam ſcripti, reſpectu membrorum cæterorum. Ergo numerus X verus eſt quotiens, proveniens ex diviſione numeri AC per Z. Quod erat demonſtrandum.

```
5 1. 2       13. Diviſ.
3 9
———
1 2. 2  (    5
1 1  7   39 —— N.
            13
————
     5
```

Quod verò, cùm diviſor non metitur dividendum, verus quotiens nihilominus ſit numerus integer (39) unà cum fracto (N) cujus numerator eſt is, qui peractâ diviſione reſtat, nominator verò diviſor ipſe, ſic demonſtro. Ut unitas eſt ad *a* quotientem integrum (39) ita diviſor (13) eſt ad dividendum (512) dempto reſiduo (5). Rurſum ut unitas eſt ad fractum N ſic *b* nominator (13) ad numeratorem 5; hoc eſt diviſor ad reſiduum. Ergo ut unitas ad *c* integrum cum fracto; ita eſt diviſor (13) ad totum dividendum. Ergò integer ille cum fracto verus *d* quotiens eſt. Quod erat demonſtrandum.

a *patet ex def.* 14. *l* 7. *& ex jam oſtenſis.*
b *patebit ex theor.* 1. *cap.* 2. *l.* 2.
c 24. 5.
d *defin.* 14. 7.

Cur autem nunquam ſimul ad quotientem liceat adſcribere plus quam novem, ita fiet manifeſtum. Vel membrum A & diviſor B æquè multis conſtant notis; vel membrum excedit unâ: *f* neque enim poteſt unquam pluribus excedere.

A 2996
B 1000

f *patet ex n.* 1.

Si

Si æquè multis notis conſtant, liquet ex poriſmate 4 cap. 3, B in A contineri minùs quàm decies. Si membrum A unâ notâ excedat diviſorem B, tunc ultima nota diviſoris major eſt ultimâ notâ membri, ut patet ex num. 1. ac proinde per poriſma 5. cap. 3. rurſum continetur B in A minùs quàm decies. Quare cùm diviſor in membro quolibet contineatur ſemper minùs quàm decies, cauſa jam manifeſta eſt, cur non liceat unquam ad quotientem plus ſimul adſcribere, quàm 9.

A	2999
B	300

PRAXIS MODI II.

OPorteat numerum A dividere per numerum B.

1. Diviſorem ſubſcribe dividendo ad ſiniſtram, ſic ut nota ultima ultimæ reſpondeat, penultima penultimæ, & ſic deinceps. Quod
k *Scem.* 1. ſi numerus ſupra diviſorem poſitus (370) *k* tunc minor eſſet diviſore, oportebit diviſorem ad unum locum promovere dextrorſum, ut in exemplo cernitur.

Cenſetur autem ſupra diviſorem eſſe poſitum, quidquid illi ad lævam eſt. Undè ſupra 821 eſt 3702; ſupra 8 eſt 37; ſupra 2, eſt 370.

Scema. I.

37029 (4
821

Sce. 2

5
~~3~~ ~~7~~ 0 2 9 (4
~~8~~ 2 2

Sce. 3.

4
~~5~~ 2
~~7~~ ~~0~~ 2 9 (4
~~8~~ ~~2~~ 1

Sce. 4.

4 1
~~5~~ ~~2~~ 8
~~3~~ ~~7~~ ~~0~~ ~~2~~ 9 (4
~~8~~ ~~2~~ ~~1~~

Nota. Characteres, quibus ad dextram hîc virgula eſt, cenſentur deleti.

2, Quære quoties diviſor in notis ſupra ipſum oſitis contineatur. Sed quia plerumque hoc ju-icatu difficile eſt, quære quoties ultima divi-oris nota (8) in numero ſupra ipſam ſcripto 37) contineatur. Reperies contineri quater. cribe ergo 4 poſt lunulam.

3. Per notam (4) in quotiente ſcriptam, mul-iplica totum diviſorem, & productum ſubtra-e à notis (3702) ſupra diviſorem ſcriptis; tum eſiduo ſupra eaſdem ſcripto, dele tam diviſorem uàm notas ſupra ipſum poſitas. Malunt autem lerique ſingulas ſeorſim notas diviſoris per quo-ientem (4) multiplicatas, à numeris ſupra ipſas oſitis ſubducere, ſubtractione videlicet multi-licationi alternatim interpoſitâ.

Exemp. *a* 8 in 4 facit 32; quæ ſubtracta ex 37 re-inquunt 5. dele *b* 37 & 8; 5 verò ſcribe ſupra 7. Rurſum 2 in 4 faciunt 8, quæ ſubtracta ex 50 re-inquunt 42. dele *c* igitur 50 & in diviſore 2; reſi-duum verò 42 ſcribe ſupra 50. Denique 1 in 4 fa-it 4, quæ ſubtracta à 422 relinquunt 418. Dele *d* gitur 422, & 1: reſiduum autem 418 ſcribe ſupra 22. Atque ita diviſoris applicatio una peracta eſt.

a *Sce.* 1.
b *Sce.* 2.
c *Sce.* 3.
d *Sce.* 4.

e *ſcema* 2. 4. Verùm *e* quia ultimâ diviſoris notâ (8) per quotientem (4) multiplicatâ & ſubtractâ (ex 37,) etiam nota penultima (2) per eundem quotientem (4) multiplicata, ſubtrahi debet à reſiduo (50) ſupra ipſam poſito; itemque & prima (1) multiplicata *f* per quotientem eundem (4) ſimiliter à reſiduo ſupra ipſam ſcripto (422) ſubducenda eſt; hinc fit, ut dum quæritur, quoties diviſoris nota ultima (8) in notis ſupra ipſam exiſtentibus (37) contineatur, talis poſt lunulam nota in quotiente ſit reponenda, per quam ſingulæ notæ diviſoris multiplicatæ, poſſint ſubtrahi à numeris ſupra ipſas ſcriptis, & eâ quidem adhuc lege, ut ultimâ ſubtractione peractâ, reſiduum (418) *g* ſit vel nullum, vel diviſore minus, quemadmodum num. 4. modi 1, eſt traditum. Quare ſi primâ ſubtractione factâ, nequeat peragi ſecunda, aut his peractis, tertia, nota poſt lunulam ſcripta minuenda eſt unitate eò uſque, dum ſubtractiones ſingulæ poſſint abſolvi. Priùs igitur, quàm opereris ſeriò: tota operatio num. 3. præſcripta, erit mentaliter peragenda, ut nota in quotiente adſcripta examinetur. Quod ſanè non tyronibus modò, ſed etiam non rarò exercitatis ſubmoleſtum eſt. Undè ſatiùs erit hoc examen notando ſeorſim inſtituere.

f *ſcema* 3.

g *ſcema* 4.

Exemplo jam dicta declaremus. Detur M. dividendus per N. Quæro quoties N in notis ſupra ipſum poſitis 738 contineatur. Reperio ter. Scribo ergo 3 poſt lunulam. 2 in 3 facit 6, quæ ablata à 7 relinquunt,

Scem. 5.

~~1~~ 1
M. ~~7~~ ~~3~~ 8 2 (~~3~~ 2
N. ~~2~~ ~~4~~ 9

quunt, 1. 4 in 3 facit 12, quæ ablata à 13 relinquunt 1. 9 in 3 eſt 27, quæ ex 18 auferri nequeunt. Nota igitur 3 ad quotientem ſcripta nimis magna eſt. Quare hâc rejectâ, ſubſtituo 2, & examen repeto. 2 in 2 ſunt 4, quæ ſubtracta à 7 relinquunt 3, 4 in 2 ſunt 8, quæ ſubtracta ex 33, relinquunt 25. 9 in 2 ſunt 18, quæ ſubtracta à 258, relinquunt 240. Nota igitur 2 legitima eſt.

Sce. 6

2 4
3 5 0
7 3 8 2
2 4 9. (2

Quamvis autem plerique, ut dixi ſupra, ſubtractionem multiplicatione permiſceant, modo jam explicato: mihi tamen videtur conſultius, ut multiplicatio tota ſimul abſolvatur, & quidem à ſiniſtra in dextram, adhibitâ cautione numero 4, modi 1. præſcriptâ.

5. Applicatione primâ diviſoris abſolutâ, quæ Scem. 1, 2, 3. 4 exhibetur, promovebitur diviſor B unâ notâ verſùs dextram, uti factum vides in Scem. 7. & operatio inſtituetur per omnia ſimilis hactenus traditæ. Atque ita deinceps applicationes reliquæ, ſi plures eſſent faciendæ, abſolventur.

Scem. 7.

4 1
5 3 8
A. 3 7 0 2 9
B. 8 2 1 (4

6. Si factâ aliquâ promotione diviſoris; is ne ſemel quidem in notis ſupra ſe poſitis contineatur, ad quotientem ſcribatur cyfra, & diviſor uno adhuc loco promoveatur, nullâ in dividendo notâ deletâ.

7. Siquid ſuperſit diviſione peractâ, fiet, quod præſcriptum num. 6. modi 1.

Scemate 8 exhibetur numeri A per numerum B diviſio tota, quæ ſupra tantùm declarandi gratiâ pluribus ſcematis fuit exhibita.

Demonſtratio.

HUjus modi ſimilis eſt demonſtrationi præcedentis.

Scem. 8,

		~~4~~	~~1~~			
		~~5~~	~~2~~	8	4	
A,	~~3~~	~~7~~	~~0~~	~~2~~	~~9~~	(45 $\frac{84}{821}$
B.		~~8~~	~~2~~	~~1~~	~~1~~	
				~~8~~	~~2~~	

Quamvis autem hæc ratio dividendi paſſim ſit uſitata, priorem tamen illam longè meliorem ſentio: uſitata ſiquidem, dum notas expungit, veſtigia diviſionis ac membra confundit, ut ſiquid erratum ſit, correctio adhiberi plerumque vix poſſit; ut ex ſcemate 8 ſatis apparet. Prior verò illa, & ſingula diviſionis membra, & ſingularum producta multiplicationum, & quæ ſubtractione factâ ex membris ſingulis manent reſidua, diſtinctè exhibet. Quo fit ut facilis ſit correctio, ſi error irrepſerit.

USUS TABULÆ PYTHAGORICÆ

Communis in Diviſione.

DAtus ſit numerus quicumque duabus notis conſtans, E, & nota quævis ſimplex F. Quæritur quoties F in E?

62 E
8 F

o vide tabel. cap. 6. Quæratur *o* in latere A B nota F, & in linea numerica illi reſpondente numerus E, aut eo proximè minor (56.) Ab hoc numero ſurſum aſcendendo ad latus A C, incides in quotientem quæſitum (7.)

Ratio patet ex conſtructione tabulæ cap. 6. traditæ.

DIVI-

DIVISIONIS COMPENDIA.

		D	
C 2889 | 829		1000	
	(2889	829 — G 1000	

1. CUm ultima nota diviſoris D eſt unitas, & reliquæ omnes cyfræ, à dividendo C aufer tot ad dextram notas (829), quot cyfras habet diviſor. Reliquas (2889) ſcribe poſt lunulam, quibus appone notas abjectas (829) ſupra diviſorem (1000) ſcriptas. lineolâ interpoſitâ. Quotiens erit (2889) numerus integer poſt lunulam ſcriptus unà cum fractione G. Quòd ſi notæ abjectæ etiam cyfræ ſunt, ut in exemplo quotiens erit, ipſæ notæ ad ſiniſtram reſiduæ 342.

	Diviſ.
342 | 000	1000
	(342 *quotiens.*

Demonſtratio facilè colligitur ex poriſm. 8. c. 3. Quin etiam patet ex ſecundo compendio multiplicationis c. 7. Nam 1000 multiplicans 342, producet 342000. Ergo 1000 dividens 342000 facit quotientem 342. Ut patet ex definitione 13, & 14. l. 7. Per defin. quippe 13. l. 7. Ut unitas eſt ad 1000 ita 342 eſt ad productum 342000. Ergo *a* permutando, ut unitas eſt ad a 16. 5.
342, ita 1000 eſt ad 342000. Ergo per defin. 14. 1000 dividens 342000, dat quotientem 342.

2. Cùm diviſor B conſtat aliis notis ſignificativis unâ vel pluribus diverſis ab unitate, ad dextram verò habet cyfras, à dividendo A rurſum aufer ad

A. 2. 4. 9 | 46 B 2 | 00

2	(124 $\frac{146}{200}$ m
—	
0. 4	
—	
0. 9	
9	
—	
1	

dextram tot notas (46) quot habet cifras diviſor, & notæ reliquæ 249 dividantur per ſolas diviſoris notas ſignificativas. Diviſione peractâ, ſiquid ſuperſit, quemadmodum hìc ſupereſt 1, id cum notis abjectis 46 quotienti integro 124 appone, diviſore ſcripto inferiùs & lineolâ interpoſitâ. Quotiens erit, integer 124 cum fracto *m*.

Demonſtratio ex poriſm. 8. c. 3: vel etiam ex compendio 1 multiplicationis cap. 7. diſcurſu ſimili ut paulò ante elicitur.

C 27. 2. 000 4 D

24	
—	
3. 2.	(68000
3 2	
—	
0	

3. Cùm dividendus habet cyfras ad dextram & nihil ex notis ſignificativis ſupereſt, tot quotienti adſcribentur cyfræ, quot poſt ultimum membrum ſignificativum cyfræ reſtant in dividendo.

Eſto C dividendus per D, 4. 4 in primo membro 27 continetur ſexies. Scribo ergo, 6, poſt lunulam. 4 in 6 eſt 24, quæ ſubſcribo membro 27, ab eoque ſubtraho & reſiduum 3 repono infrà

infra lineam, eique adſcribo notam dividendi proximam 2, ut habeam ſecundum membrum 32. 4 in 32 continetur octies. Scribo 8 in quotiente. 4 in 8 facit 32, quæ ſubtracta à membro 32 nihil relinquuunt. Quia verò in dividendo jam nihil reſtat præter cyfras, adſcribo quotienti cyfras totidem, & peracta eſt diviſio.

Demonſtratio ex poriſm, 8. cap. 3.

SPECIES DIVERSÆ.

EUndem ad modum tractandæ, qui traditur in multiplicatione cap. 7.

CAPUT X.

Diviſio facillima per laminas tabulæ Pythagoricæ.

IN opere diviſionis præcipuum faceſſit negotium inventio quoti ſeu quotientis, per quem multiplicandus eſt diviſor. Hunc quotum, quin etiam productum ipſum ex diviſore in quotum multiplicato, admirabili compendio laminæ exhibent. Cætera omnia peraguntur ut in modo primo cap. præcedent. qui aptior eſt huic methodo, quàm ſecundus.

Z
a b c 597 *Diviſ.*
459 0. 9. 3.
4179 (769
X
d 411. 9
3582
e 537. 3
5373
0

Datus ſit numerus A C dividendus per numerum Z.

1. Appone ſibi mutuò laminas, quæ in primo ac ſupremo ordine exhibeant diviſorem Z. Præter ſcema hìc appoſitum inſpice tabellam A X cap. 6.

2. Determina membrum primum A B, ut nu. 1. modi primi cap. 10.

3. Vide quis ordo in laminis numerum contineat membro æqualem, vel proximè minorem. Is autem ordo eſt proximè minor membro, quem immediatè ſequitur ordo membro major. Numerus laminæ exponentis XZ. ordinem denominans, eſt quotus poſt lunulam ſcribendus.

In exemplo noſtro reperis ordinem proximè minorem membro, eſſe ſeptimum. Scribe ergo 7 poſt lunulam.

4. Ordinem inventum (qui eſt ipſum productum ex diviſore in quotum 7) exſcribe infra membrum AB, ab eoque ſubtrahe & infra lineam ſcribe reſiduum (411); cui adjice, puncto interpoſito, notam (9) quæ in dividendo membrum primum AB antecedit, ut habeatur membrum ſecundum (411.9)

5. Diviſio ſecundi membri, & ſequentium eodem modo peragetur, quo primi.

6. Si

6. Si membrum eſt minus ipſo diviſore, ac proinde & primo laminarum ordine, qui nimirum continet diviſorem; quotienti cifra adſcribetur, & membro adhuc una adjicietur nota ex dividendo, ut membrum habeatur novum.

7. Si nonus ordo eſt membro minor, in quotiente ſcribatur 9.

Porrò, exercitatione vel minimâ accedente, momento cernitur quis ordo proximè minor, aut major membro ſit. Revocanda ſunt in memoriam poriſmata 2 ac 3. cap. 3: item quæ monui cap. 6, in modo exſcribendi ac legendi ordines. Deinde reflectendum eſt maximè ad ultima loculamenta ordinum, quanta nimirum ſit nota, in poſtremo ad lævam triangulo: & an ſumma notarum Rhombi proximi excedat novem, adeoque num aliqua indè nota in triangulum poſtremum ſit rejicienda, &c.

Demonſtratio.

FAcilè colligitur ex demonſtratis cap. 9. & ex ipſa diviſionis definitione. Quam vide. ante libr. 7. def. 14.

Quàm verò præſtans ſit hæc dividendi ratio, nemo certiùs intelliget, quàm qui fuerit expertus. Plures ſanè diviſiones unâ alterâve horâ ſic expediet, quàm die integro viâ communi. Ad hoc temporis atque operæ ingens compendium accedit operationis ſecuritas, quæ errori ex incuria & hallucinatione orto, vix locum ullum relinquit.

CA-

CAPUT XI.

Additionis, Subtractionis, Multiplicationis, Diviſionis examina.

TUtiſſimum eſt, ut per invicem hæ ſpecies examinentur, cùm reliquæ praxes ſint errori obnoxiæ.

ADDITIONIS EXAMEN.

123	A
25	B
148	X
25	
123	C

FIt per ſubtractionem. Eſto ſumma X facta ex additione duorum numerorum A, & B. Alterutrum additorum, puta B, ſubtrahe à ſummâ X. Si reſiduus C ſit idem cum altero A, rectè peracta fuit additio. Erratum eſt, ſi non eſt idem.

297	D
835	E
476	F
1608	Z
210	

Quod ſi exiſtat ſumma Z ex additione trium numerorum D, E, F, aut plurium, examen inſtituetur hunc in modum. Incipe à ſiniſtra & dic 2, 8, 4 ſunt 14 hæc ſubtracta ex 16 relinquunt, 2, quæ cum, 0, faciunt 20. dein 9, 3, 7 faciunt 19; hæc ablata ex 20 relinquunt 1, quod cum 8 facit 18. 7, 5, 6 faciunt 18, quæ ablata ex 18 nihil relinquunt. Proba igitur fuit additio, cùm ſumma Z æqualis reperiatur omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis.

SUB-

SUBTRACTIONIS EXAMEN.

234.	G
52.	H
182.	X
52.	
234.	K

FIt per additionem reſidui (X) ad numerum ſubtractum (H): ſi enim ſumma K indè facta conveniat cum numero (G) à quo facta eſt ſubtractio, proba eſt ſubtractio; mala, ſi non conveniat.

234	G
52	H
182	X
52	L

Licebit etiam ſubtractionem examinare per ſubtractionem. Reſiduum X ſubtrahe ab G, & novum reſiduum fit L. Si hoc conveniat cum numero H priùs ſubtracto, bona fuit prior ſubtractio. Ratio utriuſque examinis manifeſta.

EXAMEN MULTIPLICATIONIS.

523	N		
6	P	(523.	R
3138	Q		

FIt per diviſionem. Numeri ſe mutuò multiplicantes ſint N, P. Per multiplicantem P divide productum Q. Si quotiens R conveniat cum multiplicato N, rectè inſtituta fuit multiplicatio; malè verò, ſi non conveniat.

Ratio patet ex notione prima *a* multiplicationis ac diviſionis & 16. l, 7. a *defin.* 13. & 14. 7.

Si per laminas facta eſt multiplicatio, vix opus ullo examine; adeò ſecura eſt ab errore iſta methodus. Si tamen volueris examinare, nullum erit examen facilius, quàm ipſa multiplicationis iteratio.

FXA-

EXAMEN DIVISIONIS.

A	B
2. 4. 8.	2 *Div*
2	
——	(124 C
0. 4	
4	
——	
0. 8	
8	
—	
0	

FIt per multiplicationem. Diviſor B multiplicetur per quotientem C. Si producatur numerus diviſus A, proba eſt diviſio; ut patet ex definitione *f* diviſionis, ac multiplicationis ac 16. l. 7.

f defin. 13. & 14. 7.

Si poſt diviſionem aliquid ſuperſit, diviſorem E multiplica per quotien-

A	E
24. 1. 1.	3. *Diviſ.*
24	(803 F
——	
0. 1. 1.	G
9	2409.
—	
2	2
	——
	H. 2411

tem F: producto G add. reſiduum 2. Si ſumma H ſit æqualis dividendo A proba eſt diviſio.

Quod ſi per laminas peracta diviſio eſt, vix opus erit examine ullo. Si tamen examinare placuerit, multiplicatio ad examen requiſita, iiſdem manentibus laminis, quæ diviſioni inſervierunt, perficietur.

Scholium.

MOdos examinandi per abjectionem novenarii quoniam fallaces ſunt, hîc non lubuit adſcribere. Nituntur tamen inſigni proprietate ejuſdem numeri.

1. Metitur enim novenarius omnem numerum, cujus notæ acceptæ tanquam ſimplices, conficiunt 9. *Tales numeri ſunt*, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, 117, 126 *& alii infiniti.*

2. *Ind*

2. *Imò cujuſcunque numeri, à novenario numerati, notæ ſimpliciter acceptæ conficiunt 9; illis tantùm numeris exceptis, quorum omnes notæ ſunt 9, cujuſmodi ſunt 99, 999 &c.*

3. *Si numerus quicunque duabus notis conſtans, quem 9 non metitur, dividatur per 9, idem erit reſiduum, cum eo, quod remanet, ſi notæ ſimpliciter acceptæ dividantur per 9. Ut ſi 64 dividantur per 9 remanet, 1, Accipiantur jam notæ ſecundum valorem ſimplicem. 6. & 4 faciunt 10, quæ diviſa per 9 etiam relinquunt, 1. Patet ex 1 & 2.*

4. *Quod ſi notæ numerum datum componentes, ſimpliciter acceptæ, conficiant minus quàm 9, hoc, quod conficiunt, erit ipſum reſiduum quod relinquetur numero dato per 9 diviſo. Dentur 33: hæc deviſa per 9 relinquunt 6, quantum videlicet conficiunt ipſæ notæ ſimplices 3 & 3.*

5. *Atque ex his demum conſequens eſt, ex quovis numero diviſo per 9, idem relinqui, quod relinquitur ex notis ejuſdem numeri ſimpliciter acceptis, ſi per 9 dividantur.*

Neminem legi qui horum cauſam aperiret. Indicabo fontem verbo. Novenarius eſt unitate minor denario. Hoc ritè ſi expendas & applices, proprietates indè jam recenſitas non difficulter deduces.

Porrò quamvis hæc proprietas & pulchra ſit & veriſſima: examina tamen per illam inſtituta fallunt. A notis ſiquidem omnium numerorum addendorum ſimpliciter acceptis 9 abjiciuntur, quoties poſſunt; hoc eſt dividuntur illæ per 9, & reſiduum ſervatur. Similiter à notis ſummæ ſimpliciter acceptis abjiciuntur 9 quoties poſſunt. Quod ſi reſiduum idem ſit cum priori reſiduo, concluditur ritè fuiſſe peracta additio. Sed fallit concluſio, quia licèt ple-

rum-

rumque tum erratum non ſit, infiniti tamen caſus dari poſſunt, in quibus hoc examen indicet additionem eſſe bonam, quæ mala eſt. Ratio eſt, quia poteſt novenarius (imò & quivis numerus) dividendo duos numeros inæquales, idem exhibere reſiduum; quod quidem per ſe eſt manifeſtum.

En exemplum. *In numeris A, B. C. 3 & 5 ſunt 8, & 8 ſunt 16. Abjectis 9 reſtant 7, quæ cum 2 faciunt 9; quibus abjectis, 3 & 4 faciunt 7. numeris igitur A, B diviſis per 9, reſtant 7. Jam in numero C, 8 & 3 faciunt 11: abjectis 9, reſtant 2; quæ cum 5 faciunt 7. Utrobique igitur tam ex addendis A, B, quàm ex ſumma prætenſa C ſuperſunt 7: neque tamen C vera ſumma eſt A, B; conficiunt enim illi 592. Pari modo in ſubtractione, multiplicatione, diviſione, radicum extractione hujus examinis fides ſuſpecta eſt.*

358	A
234	B
———	
835	C

ARITH-

ARITHMETICÆ PRACTICÆ.

LIBER II.

LOGISTICA FRACTORUM NUMERORUM.

CAPUT I.

Fractorum Numerorum definitio, Scriptio, Enunciatio.

NUmerus fractus, qui etiam fractio & minutia dicitur, eſt pars, vel partes unitatis, aliquod totum diviſibile repræſentantis. Ut ſi totum aliquod ſectum ſit in quinque partes æquales, & quiſpiam ex illis ſumpſerit tres, dicentur illæ tres quintæ partes, numerus fractus.

Quoniam igitur fractus numerus eſt pars, parteſve alicujus totius, duobus numeris ſcribi debet, quorum unus indicet quot partes ex toto acci-

accipiantur, alter quales. Scribuntur porrò duo illi numeri ſupra invicem, lineolâ interpoſitâ. Ut vides in his exemplis.

$$A\frac{1}{2} \qquad B\frac{2}{3} \qquad C\frac{4}{7} \qquad D\frac{11}{13}.$$

Superior numerus indicat, quot ex toto partes accipiantur: inferior deſignat, in quot partes totum ponatur diviſum, ac proinde quales ſint partes illæ, quæ ex toto ſunt acceptæ.

Superior igitur, quia partium ex toto acceptarum indicat numerum, numerator dicitur; inferior, autem quia partium acceptarum deſignat ſpeciem, nominator, ſeu denominator appellatur.

Fracti A, B, C, D ſic enuntiantur. A: una ſecunda, ſeu una dimidia. B: duæ tertiæ. C: quatuor ſeptimæ. D: undecim decimæ tertiæ.

Quamvis autem pro toto diviſibili, plerumque unitas ſupponatur, numerus tamen quicunque ſupponi poteſt. Quare E fractus, ſi totum ſint 64 aurei, ſignificat quinque octavas partes 64 aureorum.

$\frac{5}{8}$ E

Denique ad fractorum naturam penitùs intelligendam, id erit ſtudioſè obſervandum, fractos ab integris numeris quoad rem non differre. Ea ſola differentia eſt, quòd fracti deſignent res, quæ ſint partes rerum ab integris numeris deſignatarum, ac proindè quòd unitates fracti numeri ſint relativæ; integri verò numeri unitates ſint abſolutæ. Dentur exempli gratiâ floreni 125 & fractio *a*, hoc eſt 4 vigeſimæ unius flo-

floreni. Numerus integer 125 continet centum viginti quinque unitates, quarum ſingulæ florenum deſignant. Fractus ſimiliter *a* hoc eſt quatuor vigeſimæ partes floreni, continet quatuor unitates, quarum ſingulæ deſignant unam partem vigeſimam floreni, hoc eſt aſſem unum, ac proindè quatuor vigeſimæ floreni, ſignificant 4 aſſes, qui tam eſt numerus integer, quàm 125. floreni. Imò quilibet numerus integer, res quantas deſignans, fractus eſt, ſi cum majori toto comparetur. Nam 2 floreni ſunt una tertia unius libræ, ſive *b*; & 3 pedes ſunt tres quintæ unius paſſus ſive *c*; & 2000 paſſuum ſunt duæ quintæ unius milliarii Italici, ſive *d*. Ad hæc tyrones advertere multùm intereſt. Cauſa namque præcipua, ob quam illis fractorum numerorum tractatio difficilis & obſcura videri ſoleat, ea eſt, quòd prius ad operationes fractorum ac regulas addiſcendas proſiliant, quàm illorum naturam perſpexerint.

$\frac{4}{20}$ a

$\frac{1}{3}$ b

$\frac{3}{5}$ c

$\frac{2}{5}$ d

Monitum generale.

CUm duæ fractiones aut plures inter ſe comparantur, ſemper intelligendæ ſunt eſſe partes ejuſdem totius, niſi contrarium indicetur.

CAPUT II.

Fractorum Theoria prima.

THEOREMA I.

FRactus omnis eſt ad totum, ſeu unitatem, ut numerator ad denominatorem.

Demonſtr. Patet ex definitione numeri fracti capite præcedenti explicata. Denominator enim deſignat ipſum totum ſectum in tot partes æquales, quot in denominatore unitates ſunt. Numerator verò indicat quot partes ex toto ita ſecto accipiantur. Quare cùm fractus nihil aliud ſit, quàm ille ipſe partium numerus, quas acceptas eſſe ex toto, numerator indicat; manifeſtum eſt, fractum eſſe ad totum ut numerator eſt ad nominatorem. Ex hoc ritè intellecto exiſtunt.

Corollaria.

I.

Cùm numerator eſt minor denominatore, fractus ſuo toto minor eſt.

$\frac{30}{20}$ a

$\frac{20}{20}$ b

$\frac{3}{3}$ c

$\frac{4}{4}$ d

Cùm numerator nominatore major eſt, fractus eſt major toto. Sic fractus *a*, id eſt triginta vigeſimæ exemp. gr. floreni (hoc eſt 30 aſſes) ſunt majores toto, nempe floreno, ſeu 20 aſſibus.

Cùm numerator nominatori æqualis eſt, fractus toti æquivalet. Sic *b* id eſt 20 vigeſimæ floreni (hoc eſt 20 aſſes) conficiunt florenum. Sic *c*, *d* æquivalent unitati ſeu toti, quod unitas repræſentat.

II.

I I.

$\frac{2}{3}$ f Ex hoc theoremate colligitur veritas illius, quod num. 8. cap. 9. in modo primo diviſionis traditur; nimirum cùm numerus (2) minor per majorem (3) dividendus eſt, quotientem haberi, ſi major minori ſubſcribatur, ut fiat fractio *f*. In omni ſiquidem diviſione quotiens eſt ad unitatem, ut dividendus, qui hic eſt 2, ad diviſorem, qui hîc eſt 3. Sed etiam fractio *f* eſt ad unitatem, ut 2 ad 3. Ergo *f* hîc eſt quotiens. *Def. 14 l. 7.*

THEOREMA 2.

	E	F	
a	2	3	c
b	4	6	d

SI fracti unius numerator (a) *eſt ad nominatorem* (b), *ut fracti alterius numerator* (c) *eſt ad ſuum nominatorem* (d); *fracti æquales erunt.*

Demonſtratio. Fractus E eſt ad totum, ut numerator *a* ad nominatorem *b* per theor. 1; hoc eſt per hyp. ut numerator *c*, ad nominatorem *d*; hoc eſt per theor. 1, ut fractus F ad idem totum. Quare cùm ambo fracti E & F ad totum, quod in utroque idem eſſe ſupponitur, eandem habeant proportionem, per 9 lib. 5. æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

Itaque valor fractorum non ex magnitudine numerorum, quibus exprimuntur, ſed ex proportione eorundem æſtimandus eſt; quod ulteriùs ex theor. 3, 4, 5, innoteſcet.

THEOREMA 3.

FRactus ille (A) major eſt altero (B) cujus numerator (e) ad nominatorem (f) majorem habet proportionem, quàm alterius numerator (g ad nominatorem ſuum (h).

	A	B	
e	8	2	g
f	16	6	h

Demonſtratio. Nam per theor. 1. fractus A ad totum eandem proportionem habet, quàm *e* ad *f*; hoc eſt ex hyp. majorem quàm *g* ad *h*; hoc eſt per theor. 1. majorem quàm fractus B ad totum idem. Ergo per 10. l. 5. fractus A fracto B major eſt. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 4.

FRacti, quorum numeratores in mutuos denominatores ducti eundem gignunt numerum, æquales ſunt.

Dentur fracti E, F. & tam *a* in *d* quàm *c* in *b* producant eundem numerum *k*. Dico fractos E, F æquales eſſe.

	E	F	
a	2	3	c
b	4	6	d
k	12		

Demonſt. Per 19. l. 7. erit *a* ad *b*, ut *c* ad *d*. Ergo per theor. 2. fracti E, F æquales ſunt. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 5.

FRactus ille (A) altero (B) major eſt, cujus numerator multiplicans alterius nominatorem, majorem gignit numerum.

Pro-

Producat *g* in *n* majorem numerum *e*, quàm *m* in *h*. Dico A fractum majorem eſſe fracto B.

A	B
g 2	3 m
—	—
h 4	9 n
c. 18.	12. d

Demonſt. Quia *c* genitus ex *g* in *n* major eſt *d* genito ex *m* in *b*, habebit per corol. 2. p. 19. l. 7. *g* ad *h* majorem rationem, quàm *m* ad *n*. Ergo per th. 3. fractus A major eſt fracto B. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

EX 4 & 5 theoremate modus habetur facillimus examinandi, fractine æquales ſint, an inæquales, & uter major ſit.

THEOREMA 6.

F*Racti* (D, G) *idem nomen habentes* (P) *eam inter ſe proportionem habent*, *quam numeratores* (m. n.)

D	G
m 7	5 n
—	—
p 8	8 p

Demonſtr. Per th. 1. fractus D eſt ad totum, ut *m* ad *p*. Idem verò totum eſt ad fractum G, ut idem *p* eſt ad *n*: Ergo ex æquo per 22. 5. fractus D eſt ad fractum G, ut *m* ad *n*. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 7.

D*Entur fracti* P, R: *primi numerator* a *multiplicans alterius nominatorem* o *faciat* a o; *alterius verò numerator* c *multiplicans nominatorem primi* n *producat* c n. *Erit fractus* P *ad fractum* R, *ut* a o *ad* c n.

Demonſt. Nominatores *n* & *o* invicem multiplicantes producant *n o*. Fractus P eſt ad totum, ut *a* ad *n*, per th. 1. Sed etiam per ſchol. p. 17. l. 7. *a o* eſt ad *n o* ut *a* ad *n*. Ergo fractus P eſt ad totum, ut *a o* eſt ad *n o*. Atqui per ſchol. p. 17 *n o* eſt ad *c n* ut *o* ad *c*; hoc eſt per th. 1. ut totum eſt ad fractum R. Igitur ex æquo per. 22. 5 fractus P eſt ad fractum R, ut *a o* eſt ad *c n*. Quod erat demonſtrandum.

no

ao cn

$P\,\frac{a}{n} \qquad \frac{c}{o}\,R$

Totum:

THEOREMA 8.

Si duo fracti (C, D) *eundem numeratorem habuerint* (a) *erit prior* (C) *ad poſteriorem* (D) *ut reciprocè poſterioris denominator* (o) *ad prioris nominatorem* (n.)

Demon. Ex *a* in *o* fiat *a o*, & *a n* ex *a* in *n*. Per præced. fractus C eſt ad fractum D, ut *a o* ad *a n*; hoc eſt (per ſchol. p. 17. l. 7.) ut *o* ad *n*. Quod erat demonſtrandum.

$C\,\frac{a}{n} \qquad \frac{a}{o}\,D$

ao. an.

CA-

CAPUT III.

Reductiones Fractorum.

PROBLEMA I.

Reductio fractorum ad minimos terminos.

DIcitur fractio ad minimos terminos reduci, cùm reperitur ei æquivalens alia minimis numeris expreſſa.

Datus ſit fractus A, ad minimos terminos reducendus. Per prop. 35. l. 7. inveniantur numeratori *n* ac nominatori *p*, proportionales minimi, *r* & *t*, ex quibus fractus conſtituatur B. Hic eſt quæſitus.

	A	B	
n	27	3	r
p	36	4	t

Demonſt. Nam quia per conſtr. *r* eſt ad *t* ut *n* ad *p*, æquales erunt fracti A & B, per theor. 2. cap. præced. Neque poteſt alius fractus, qui minoribus terminis conſtet, fracto A æqualis exhiberi; ad hoc enim ut patet ex 2. theor. requirerentur duo numeri ipſis *n*, *p* proportionales & minores minimis jam repertis *r*, *t*: quod fieri non poteſt.

Quod ſi *n*, *p* termini fractionis datæ A ſint in proportione ſuâ minimi, non poterit fractio data in terminis minoribus exhiberi. Utrum verò *n*, *p* ſint in ratione ſua minimi innoteſcet ex ipſa conſtructione prop. 35. l. 7. Et univerſim per 23. l. 7. omnes numeri inter ſe primi ſunt in ſua proportione minimi.

PROBLEMA 2.

Reductio fractorum ad nomen idem.

PARS 1.

DAti ſint duo quilibet fracti N, P, ad commune nomen reducendi.

N	P
$\frac{a\,3}{b\,4}$	$\frac{5\,c}{6\,d}$

Denominatores invicem multiplicantes dabunt nominatorem communem *b d*. Tum numerator *a* ductus in nominatorem *d* producat *a d*: erit fractus R æqualis dato N. Rurſum numerator *c* ductus in nominatorem *b* gignat *c b*: erit fractus T par dato P.

$\frac{ad}{bd}$	$\frac{cb}{bd}$	$\frac{18}{24}$	$\frac{20}{24}$
R	T	R	T

N	P
a 1	3 c
b 4	6 d

R $\frac{6}{24}$ $\frac{12}{24}$ T R $\frac{ad}{bd}$ $\frac{cb}{bd}$ T

Demonſt. Per ſchol. p. 17. l: 7. *a d* eſt ad *b d*, ut *a*, ad *b*. Ergo per th. 2. cap. præc. fracti N & R æquales ſunt. Similiter quia per idem ſchol. *c b* eſt ad *b d*. ut *c* ad *d*, rurſum per th. 2. fracti P, & T æquales erunt. Datos igitur N, P ad idem nomen reduximus. Quod erat faciendum.

PARS 2.

DAti ſint tres fracti, G, H, I, aut plures ad nomen idem reducendi.

De-

$$\text{G}\ \frac{a\,3}{b\,4}\qquad \text{H}\ \frac{c\,5}{d\,6}\qquad \text{I}\ \frac{e\,1}{f\,8}$$

$$\text{R}\ \frac{144}{192}\qquad \text{T}\ \frac{160}{192}\qquad \text{V}\ \frac{24}{192}$$

$$\text{R}\ \frac{adf}{bdf}\qquad \text{T}\ \frac{cbf}{bdf}\qquad \text{V}\ \frac{ebd}{bdf}$$

Denominatores *b,d,f* inter ſe multiplicati dabunt denominatorem communem *b d f*. Numeratores ſinguli provenięt, ſi numerator uniuſcujuſque fractionis datæ multiplicet productum ex nominatoribus reliquarum.

Sic ut fractus G reducatur ad nomen *bdf*, ejus numerator *a* ductus in *d f* genitum ex nominatoribus reliquorum H, I, producat *a d f*. Erit fractus R fracto G æqualis. Ut reducatur H, ejus numerator *c* ductus in *b f* genitum ex denominatoribus reliquorum G, I, producat *c b f*: proveniet fractus T par dato H. Pari modo V æqualis proveniet dato I.

Demonſt. *adf* eſt ad *bdf*, ut *a* ad *b* per ſcho. p. 17. l. 7. Ergo per th. 2. cap. præc. R, G æquales ſunt. Pari ratione *cbf* eſt ad *bdf*, ſeu (per ſchol. p. 19. l. 8. *dbf*, ut *c* ad *d*. Ergo per th. 2. etiam fracti T, H æquales ſunt. Denique quia *ebd* eſt ad *bdf*, ut *e* ad *f*, æquales erunt fracti V, I. Reducti ſunt igitur fracti G H, I, ad nomen idem. Quod erat faciendum.

Operationem totam utriuſque partis, ipſe litterarum conſpectus exhibet: qui ſanè logiſtices ſpecioſæ fructus eſt proprius & longè nobiliſſimus.

Pars

P A R S 3.

DEntur fracti quotcunque A,B, C, quos oporteat ad idem nomen reducere, & in minimis terminis.

A	B	C
$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{8}$
		24
6	4	3
18	20	3
24	24	24
D	E	F

Inveni per 36 & 38. l. 7. minimum numerum, 24, quem nominatores dati 4, 6, 8 metiuntur. Is erit communis nominator. Hunc nominatores dati 4, 6, 8 dividant per quotientes, 6, 4, 3, qui ſi multiplicentur per numeratores datos 3, 5, 1. provenient 18, 20, 3 numeratores novi, eruntque fracti, D, E, F ejuſdem nominis datis, A, B, C æquales, in terminis minimis.

Demonſt. Quod ſint æquales ſic oſtendo. Ex conſtr. & ex ſcholio p. 19. l. 9. patet tribus hiſce numeris 4, 24, 3 quartum eſſe proportionalem 18. Undè permutando 4 eſt ad 3, ut 24 ad 18. Ergo per th. 2. fracti A, D æquales ſunt. Pari argumento B. & E; C & E æquales erunt.

Quod etiam ſint in minimis terminis, ſic demonſtro. Ut habeantur fracti ejuſdem nominis & æquales datis A,B,C, neceſſe eſt ut denominatores dati 4,6,8 adæquatè dividant nominatorem communem futurum, ſic enim proveniunt quotientes, qui ducti in numeratores datos, 3, 5, 1, exhibent novos numeratores quæſitos. Atqui per conſtr. nominator ille communis; 24, jam inventus, eſt minimus, quem nominatores dati, 4, 6, 8, adæquatè dividunt. Ergo non poſſunt alii fracti nominis ejuſdem, datis, A,B,C æquales inveniri, in terminis minoribus, quàm reperti jam D, E, F.

PRO-

PROBLEMA 3.

Fractionis reductio ad nomen datum.

F		G
a 2		8 c
—	—	—
b 3	12 d	12 d
	24. c	

Data ſit fractio F reducenda ad fractionem, cujus nominator ſit d.

Per 19. l. 9. ut *b* ad *a*, ſic fiat *d* ad alium *c*: quod fit ducendo *a* in *d*, & productum *c* dividendo per *b*. Quotiens enim *c* erit numerator quæſitus, qui cum nominatore dato *d*, dabit fractum G æqualem dato F, ut patet ex theor. 2. cap. præced.

			m. p
14	8 d	6 n	2 1
—		—	—
b 5		8 d	5 8
	32. e	(n 2	
		(6 – m	
			5

Quod ſi *b* non metiatur *e*, ut contingit in hoc exemplo, ubi *b* dividens *e* dat quotientem *n*, *m*, quotientem integrum *n* ſcribe ſupra denominatorem *d*, erit fractus *n*, *d* † *m*, *p*, (hoc eſt ſex octavæ, cum duabus quintis ex una octava) æqualis fracto *a*, *b*.

Demonſtr. Quoniam ut *b* eſt ad *a* ita *d* eſt ad *n*, *m*, manifeſtum eſt hunc numerum *n*, *m* deſignare quot partes à *d* denominatas, nempe quot octavas partes ex toto oporteat accipere, ut fracto *a*, *b* æqualis fractus habeatur nominis *d*. Cùm igitur unitates ſingulæ integri numeri *n* deſignent ex toto accipi ſingulas octavas partes, liquet id, quod in numeratore *n*, *m* eſt minus unitate, nempe *m*, deſignare ex toto accipi inſuper aliquid minus unâ octavâ parte, videlicet *m*.

cet *m. p,* id eſt duas quintas ex una octava, quæ eſt fractio fractionis. Sed de his cap. 8. plura.

$\frac{1\ 7}{8}$	*Hujus reductionis uſus præcipuus eſt ut valor fractionis datæ cognoſcatur in partibus ejuſdem totius notioribus. Ut ſi offerantur* l, *id eſt ſeptem octavæ unius perticæ 20 pedum: reducantur* l, *ad vigeſimas, provenient* p † q. r; *hoc eſt pedes 17 cum dimidio, quibus æquivaleant* l, *id eſt ſeptem octavæ unius perticæ.*
p q r $\frac{17}{20} + \frac{1}{2}\ \frac{1}{20}$	

PROBLEMA 4.

Fracti toto ſuo majoris reductio ad integrum numerum.

ESto fractus A toto major. Numerator (*b*) per denominatorem (*c*) dividatur. Quotiens (*d*) æquivalet fracto (A.)

def. 14. l. 7.

A
b 12
— (3. d
c 4

Demonſtr. Fractus A eſt ad totum ſeu unitatem pro toto ſuppoſitam, ut numerator *b* ad nominatorem *c* per th. 1. cap. præc. Atqui etiam quotiens *d* eſt ad unitatem ut numerator *b*, diviſus, ad nominatorem *c*, qui diviſor eſt. Ergo fractus A & quotiens integer *d* eandem rationem habent ad unitatem. Ergo per 9. ſ. æquales ſunt. Quod erat demonſt.

Quod ſi numeratore per nominatorem diviſo quotiens ſit integer cum fracto, ut contingit in fractione B, tunc non poterit fractio data reduci tota ad integrum, æquivalebitque integro & fracto ſimul ſumptis. Demonſtratio eadem eſt.

B
c 14 (e 3
— (3 ⁻
d 4 4

Eadem

Eâdem ratione reducuntur aſſes ad ſolidos, orenos, pattacones; floreni ad aureos, libras :c. Pedes ad paſſus; pedes & paſſus ad millia-ı,&c. Ut ſi velim 40000 pedum reducere ad ıilliaria 5000 pedum continentia, divido 40000 er 5000, proveniunt 8 milliaria.

PROBLEMA V.

Integri numeri reductio ad fractum nominis dati.

Datus ſit numerus integer, *a*, reducendus ad ractum, cujus nominator it *b*.

a. 7 b 4 E $\frac{28}{4}$ c b

Integer (*a*) datus multiplicet (*b*) nomen da-um, & producto (*c*) ſubſcribatur nomen da-um: fractio (E) indè nata æquivalet inte-ro (*a*.)

Demonſtratio. Per definit. multiplicationis ut *Def.* 13. roductum *c* eſt ad multiplicatum *b*, ita multi- *l.* 7. licans *a* eſt ad unitatem. Sed etiam ut *c* eſt ad *b*, a fractus E eſt ad unitatem. Ergo integer *a* & fractus E eandem rationem habent ad unita-em, ac proinde æquales ſunt. Quod erat de-monſtrandum.

Si cuivis integro, ut 8, ſupponatur unitas, fit ractio, vel potiùs quaſi fractio, æquivalens in-tegro 8.

Hunc in modum ſolidi, floreni, pattacones, au-rei reducuntur ad aſſes; aurei & floreni ad libras, &c. Milliaria ad paſſus & pedes, &c. Gradus ad minuta prima, & hæc ad ſecunda, & ſic deinceps.

C A-

CAPUT IV.

Additio Fractorum.

Addendus Sit

I.

FRACTUS FRACTO.

A $\frac{2}{5}$ $\frac{6}{5}$ B

C $\frac{8}{5}$

SI ejuſdem ſint nominis (ut A, B) numeratores (2, 6) adde. Tum ſummæ (8) ſubſcribe nominatorem communem (5.) Fractus inde natus (C) erit ſumma datorum A, & B.

D $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{7}$ E

F $\frac{14}{35}$ $\frac{15}{35}$ G

H $\frac{29}{35}$

Si diverſi ſint nominis (ut D, E,) per prob. 2. cap. 3. reducantur ad alios ejuſdem nominis (F, G:) horum ſumma (H) æquivalet datis (D, E,)

I I.

INTEGER FRACTO.

A 3 $\frac{4}{5}$ B

C $\frac{15}{5}$ $\frac{4}{5}$

D $\frac{19}{5}$

INteger (A) reducatur ad fractum (C) dato fracto (B) cognominem per prob. 5, cap. 3. Tum additio peragatur ut num. 1.

III.

III.

PLURES INTEGRI ET FRACTI.

Colligantur ſeorſim integri in unam ſummam, & ſeorſim fracti in ſummam ſuam ut num. 1. Tum hæ duæ ſummæ addantur ut num. 2.

Demonſtratio horum omnium per ſe eſt manifeſta.

CAPUT V.

Subtractio Fractorum.

Subtrahendus Sit

I.

FRACTUS A FRACTO.

I $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$ K

L $\frac{1}{5}$

Si ejuſdem ſunt nominis (ut I & K,) minor numerator (2) ſubducatur à majori (3) & reſiduo (1) ſubſcribatur communis nominator (5:) fractus indè natus (L) remanet minore dato (I) ſubtracto ex dato majori (K).

M $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{5}$ N

O $\frac{10}{15}$ $\frac{9}{15}$ P

$\frac{1}{15}$ Q

Si diverſi ſint nominis (ut, M, & N) reducantur ad alios (O, P) nominis ejuſdem, per prob. 2. cap. 3. inter quos ſubtractio peragatur ut ſuprà.

II.

I I.

FRACTUS (S) UNITATE MINOR AB INTEGRO (R.)

EX integro (R) accipiatur unitas, à quâ ſubtrahatur fractio data (S); quod fiet, ſi ejus numerator *a* ſubducatur ex nominatore *b*, & reſiduo *c* ſubſcribatur idem nominator *b*. Fractio (T) indè orta, cum integro unitate mulctato (nempe cum 24) eſt reſiduum quæſitum.

$$\begin{array}{llll} & S & & \\ & 15\ a & 17\ b & \\ R\ 25 & \overline{17} & \overline{17\ b} & \\ 24 & 2\ c & & \\ & \overline{17\ b} & & \\ & T & & \end{array}$$

Demonſtrat. Unitas æquivalet fracto *bb* ut pátet ex corol. 1. theor. 1. cap. 1. Ergo cùm S ſubtraho ex *b b*, ſubtraho S ab unitate. Atqui ut patet ex num. 2. ſubtraho S ex *b b*, ſi ſubtraham *a* ex *b*. Ergo ſubtraho S ab unitate, dum ſubtraho numeratorem *a* ex nominatore *b*. Reliqua ſunt manifeſta.

I I I.

FRACTUS UNITATE MAJOR AB INTEGRO VEL INTEGER A FRACTO.

$$X\ 12\ \frac{18}{4}\ V$$

$$Y\ \frac{48}{4}\ \frac{18}{4}$$

$$Z\ \frac{30}{4}$$

INteger (X) per prob. 5. c. 3 reducatur ad fractum (Y) dato fracto (V) cognominem. Tum fractus datus (V) ſubtrahatur ab integro ſic reducto (nempe ab Y) ut numero 1.

Pari

Pari modo ſubtrahetur numerus integer à fracto, qui integro dato major ſit.

I V.

INTEGER CUM FRAÇTO EX INTEGRO.

A $6\frac{2}{3}$ 16. B.

C $\frac{20}{3}$

INteger cum fracto (A) per n. 2. c. 4. colligatur in unam ſummam (C,) quæ ſubtrahatur ab integro dato (B) ut numero præcedenti.

V.

INTEGER AB INTEGRO CUM FRACTO.

E.   F

D 8 $13\frac{4}{5}$

$5\frac{4}{5}$

G   F

SI integer (D) auferendus minor eſt integro (E) cui fractus (F) adhæret, integrum ab integro aufer: reſiduum (G) cum fracto dato (F,) erit reſiduum quæſitum.

I. K

H 12 $10\frac{9}{2}$

M $\frac{24}{2}$ $\frac{29}{2}$ L

$\frac{5}{2}$ N

Si verò integer auferendus (H) major eſt integro (I) cui adhæret fractus, tunc redigantur fractus (K) & cui adhæret integer (I) in unam ſummam (L) per num. 2. cap. 4. Integer verò (H) reducatur ad fractum (M) ſummæ (L) cognomi-

 nem

nem per probl. 5. cap. 3. Tum fiat ſubtractio (M ab L) ut num. 1.

I. K.

H. 12 $10 \frac{9}{2}$

P

$2 \frac{1}{2}$ $14 \frac{1}{2}$

O. N.

Vel ſic: quoniam H auferendus eſt ab I cum K, erit H minor quàm I cum K. Quia igitur ponitur H major quàm I, fractus K neceſſariò ſuperat exceſſum ipſius H ſupra I, ac proindè unitate major eſt. Itaque per probl. 4. cap 5. in fracto K, quidquid integrum eſt, eximatur, addaturque ipſi I, ut fiat O cum N, æquale I cum K. Quia jam H neceſſariò eſt non majus quàm O, aufer H ab O. Reſiduum P unà cum fracto N eſt reſiduum quæſitum.

V I.

INTEGER CUM FRACTO AB INTEGRO CUM FRACTO.

A $5 \frac{2}{3}$ B D $8 \frac{3}{4}$ E

C $\frac{17}{3}$ F $\frac{35}{4}$

INteger auferendus (A) & fractus illi adhærens (B) per n. 2. cap. 4. colligantur in unam ſummam (C.) Pari modo ex duobus aliis (D, E) fiat ſumma (F.) Hæ ſummæ ad nomen idem reducantur, per prob. 2. cap. 3, ac tum ſubtractio peragatur ut num. 1.

Horum omnium ratio per ſe clara eſt.

CAPUT VI.

Multiplicatio Fractorum.

Eſto multiplicandus

I.

FRACTUS PER FRACTUM.

A $\frac{o\,2}{p\,3}$ B $\frac{4\,m}{5\,n}$

C $\frac{8}{15}$ C $\frac{om}{pn}$

VIdelicet A per B. Numeratores *o, m,* invicem multiplicantes faciant *om* item nominatores *p, n* faciant *pn*. Erit *om* numerator, *pn* verò nominator fractionis C productæ ex multiplicatione fractionum, A, B.

I I.

FRACTUS PER INTEGRUM.

D $\frac{k\,2}{m\,3}$ E $5\ \frac{5}{1}$

F $\frac{n\,10}{m.\,3}$

D Nimirum per E. Integer (E) multiplicet (*k*) numeratorem fracti (D.) Producto (*n*) ſubſcribe (*m*) nominatorem fracti (D) Erit fractio (F) indè orta productum quæſitum.

Vel ſic. Integro (E) ſupponatur unitas, & multipli-
atio fiat ut num. 1.

I I I.

INTEGER CUM FRACTO PER INTEGRUM.

INteger & adhærens fractus, colligantur in unam ſummam per num. 2. cap. 4. Tum mul-tiplicatio fiat ut num. præcedenti.

Vel ſcorſim multiplica integrum per inte-grum, ac deindè fractum per integrum.

I V.

INTEGRUM CUM FRACTO PER IN-TEGRUM CUM FRACTO.

PEr num. 2. cap. 4. Integrum unum & adhæ-rentem ei fractum collige in unam ſummam. Alterum deindè integrum & fractum illi adhæ-rentem ſimiliter collige. Tum hæ ſummæ mul-tiplicentur, ut num. 1.

Demonſtratio.

	pnm.		omn
	o	m	om
vni.	A –	B –	C —
	p	n	pn.

SOla numeri 1, op-ratio demonſtranda eſt, reliquæ ſiquidem ex illa patent. Oſten-dendum eſt igitur fra-ctum B eſſe ad fractum C, ut unitas eſt ad fractum A. Hoc enim eſt, multiplicatum per A producere C, ut patet defin. 13. l. 7.

Ducatur *m* in *pn*: productum erit *pnm*. modo *om* ducatur in *n* productum erit *omn*. tur per th. 7. cap. 2. B eſt ad C ut *pnm* eſt

omn:hoc eſt per ſchol. p. 17. l. 7. ut *p* eſt ad *o*; hoc eſt per th. 1. cap. 2, ut unitas eſt ad fractum A. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

CUm fracti multiplicandi ſinguli minores ſunt unitate, productum utrolibet minus eſt; id quod mirari ſolent tyrones. Sed res ex definitione multiplicationis illico cernitur. *def.* 13. *l.* 7.

2	3	6
vn. — A	— B	— C
3	4	12

Cùm enim exem. gr. A multiplicando B producit C, unitas eſt ad A, ut B ad C. Sed unitas ponitur major quàm A. Ergo etiam B major eſt quàm productum C. Quod ſi A multiplicando B producat C, erit rurſum ut unitas ad B, ita A ad C. Atqui unitas ponitur major quàm B Ergo etiam A. major eſt, quàm productum C.

Si multiplicandorum unus eſt unitate major, tunc productum erit hôc minus, ſed altero majus.

CAPUT VII.

Diviſio Fractorum.

Dividendus Sit

I.

FRACTUS PER FRACTUM.

A: $\frac{a\,6}{c\,8}$ per B: $\frac{m\,2}{n\,4}$ (C: $\frac{o\,3}{p\,2}$

NImirum A per B, Si diviſoris (B) termini *m* & *n* metiantur dividendi (A) terminos *a* & *c*; numeri (*o* & *p*) per quos metiuntur, conſtituent fractum (C) quotientem quæſitum.

A $\frac{a\,4}{c\,9}$ per A $\frac{m\,3}{n\,5}$ E $\frac{n\,5}{m\,3}$

D ($\frac{an\,20}{cm\,27}$

Si verò diviſoris (B) termini non metiantur terminos dividendi (A) diviſorem (B) inverte (& fiat E,) perque eum ſic inverſum multiplica dividendum (A.) Productum (D) erit quotiens quæſitus.

I I.

FRACTUS PER INTEGRUM SEU INTEGER PER FRACTUM.

$\frac{2}{3}$ per $\frac{61}{16}$ ($\frac{2}{18}$.

INtegro ſupponatur unitas, & diviſio fiat ut num. 1.

I I I.

INTEGER CUM FRACTO PER INTEGRUM, VEL PER INTEGRUM CUM FRACTO.

REdigantur utrimque ad unam ſummam, per num. 2. cap. 4. Tùm inter utramque ſummam peragatur diviſio ut num. 1.

I V.

INTEGER MAGNUS CUM FRACTO PER INTEGRUM.

A

598 $\frac{2}{3}$ per 3

EXempli gratia 598. cum fracto A per 3. Commodius ſic operabere.

C In-

C

$\frac{1}{3}$ B $\frac{5}{9}$ C (199 $\frac{5}{9}$

Integer 598 per 3 dividatur, & quotiens ſit 199. Si quid ſuperſit, ut hìc, 1, id addatur fracto A per num. 2. cap. 4, ut habeatur ſumma B: quam divide per 3, ut num 2. quotientem C appone quotienti integro priori; eritque 199 cum C quotiens quæſitus.

Demonſtratio.

A $\frac{a}{c}$ per B $\frac{m}{n}$ (C $\frac{o}{p}$

Sola operatio num. 1, demonſtranda eſt, reliquæ enim ex hac ſunt manifeſtæ. Metiantur primò *m*, & *n* ipſos *a* & *c*, per *o p*. Quoniam ergo *m* metitur *a* ex ſuppoſitione per *o*; ergo *m* in *o* producet *a* per axio. 8. l. 7. Rurſum quoniam *n* metitur *c* per *p*; ergo *n* in *p* gignet *c*. Ergo per demonſtrationem cap. præced. fractus B multiplicans fractum C, producit fractum A. Ergo per defin. multip. unitas eſt ad B, ut C eſt ad A. Igitur *def.* 13.
permutando, unitas eſt ad C, ut diviſor B eſt ad 7.
dividendum A. Ergo per defin. diviſ. C eſt quotiens diviſionis A per B. *defin.* 14. 7.

F $\frac{mna}{mnc}$ mn,

A $\frac{a}{c}$ per B $\frac{m}{n}$ E $\frac{n}{m}$

D ($\frac{an}{cm}$

At cùm termini diviſoris B non metiuntur terminos dividendi A, tum verò admirabilior operatio videri ſolet, quòd diviſio per multiplicationem peragatur. Demonſtrandum eſt igitur, ſi A multiplicetur per diviſorem B inverſum, hoc eſt per E,

$$F \; \frac{mna}{mnc.} \quad mn.$$

$$\begin{matrix} A & & B & E \\ \frac{a}{c} & \text{per} & \frac{m}{n} & \frac{n}{m} \end{matrix}$$

$$D \left(\frac{a}{c}\frac{n}{m} \right.$$

productum D fore ipſum quotientem diviſionis A per B.

Termini diviſoris *m*, *n* in ſe mutuo ducti faciant *mn*. Tum *mn* in *a* & *c* producat *mna* & *mnc*, ex quibus fiat fractus F. Per ſchol. p. 17. l. 7. *mna* eſt ad *mnc* ut *a* eſt ad *c*. Ergo per th. 2. cap. 2. F & A æquales ſunt. Atqui numerator *m* diviſoris B, dividens *mna*, dat quotientem *na* (quemadmodum enim multiplicatio ſpecioſa perficitur ſola litterarum appoſitione, ita diviſio ſolâ earundem ſubtractione abſolvitur) & nominator *n* ejuſdem B diviſoris, dividens *mnc*, quotientem dat *cm*. Ergo per, 1, partem fractus B dividet fractum F, per quotientem D fractum. Quare cùm oſtenderim fractos F & A æquales eſſe; etiam B dividet A per quotientem D, natum videlicet ex multiplicatione ipſius A per diviſorem B inverſum, hoc eſt per E. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Mirari ſolent etiam hic arithmetices imperiti in fractorum diviſione, quotientem reperiri plerumque majorem numero ipſo, qui dividitur: quod ſemper accidit, cùm diviſor eſt unitate minor. Verùm ex definitione ipſâ diviſionis ratio eſt manifeſta. A diviſum per B, quotientem exhibeat C. Ergo per defin. diviſ. unitas eſt ad quotientem C, ut diviſor B eſt ad divi-

$$\begin{matrix} & & & & C & \\ A & \frac{5}{4} & \text{per} & \frac{2}{3} & B & \left(\frac{15}{8.} \right. \quad 1. \end{matrix}$$

diviſum A. Igitur permutando, ut unitas eſt ad diviſorem B, ita quotiens C eſt ad diviſum A. Atqui ponitur unitas major eſſe diviſore B. Ergo etiam quotiens C major eſt diviſo A.

CAPUT VIII.

De Fractis Fractorum.

QUemadmodum integris in partes ſectis, fracti numeri oriuntur, ita ex partibus integrorum in alias minores partes ſubdiviſis habentur fracti fractorum: ut ſi ſummam A ex B, 3 quartas ex 16. vigeſimis unius floreni. Scribuntur ut vides in exemplis hìc appoſitis.

A	B	C	D	E	F	G
$\frac{3}{4}$	$\frac{16}{20}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{7}$

A, B ſunt 3 quartæ ex 16 vigeſimis. C. D ſunt 2 quintæ ex una ſexta. E. F. G, ſunt 2 quintæ unius ſextæ ex 3 ſeptimis.

Compendii gratiâ fractio fractionis, appellari poterit fractio ſecunda; fractio fractionis fractionis dicatur fractio tertia.

Ut verò circa fractiones fractionum logiſticæ operationes inſtituantur, reducendæ prius erunt ad ſimplices.

Reductio Fractionis ſecundæ ad ſimplicem.

B, D
2 a . p 3
—
3 c n 4
Z
 ap 6
E —
 cn 12

DAta ſit fractio ſecunda B. D. numeratores *a* & *p* in invicem ducti faciant *ap*, & nominatores *c*, *n* faciant *cn*. Fractus E æquivalet fractioni ſecundæ B. D.

Demonſtr. Fiat ut *p* ad *n*, ita *c* ad *z*. Manifeſtum eſt fractionis ſecundæ B, D, totum eſſe D, ac proinde fractionem ſecundam B, D, eſſe ad ſuum totum D, ut eſt numerator *a* ad nominatorem *c*. Sed per th. 1. cap. 2. fractus ſimplex D eſt ad unitatem ut *p* ad *n*: hoc eſt per conſtr. ut *c* ad *z*. Ergo ex æquo fractio ſecunda B, D eſt ad unitatem, ut *a* ad *z*. Deinde quia per conſtr. ut *p* eſt ad *n*, ita *c* eſt ad *z*; erit per 19. l. 7. *pz* factum ex *p* in *z* æquale *cn* facto ex *c* in *n*. Quoniam igitur *p* multiplicans *a* facit *ap*, & *p* multiplicans *z* facit *cn*, erit per 17. l. 7. ut *a* ad *z*, ita *ap* ad *cn*. Sed ut *a* eſt ad *z* ita (quod jam oſtendi) fractio ſecunda B, D eſt ad unitatem; & ut *ap* eſt ad *cn*, ita per th. 1. cap. 3, fractus E eſt ad unitatem. Ergo per 11. l. 5, fractio ſecunda B, D eſt ad unitatem, ut fractus E eſt ad unitatem. Ergo per 9. l. 5. Fractio ſecunda B, D, & ſimplex D æquales ſunt. Quod erat propoſitum.

Reductio fractionis tertiæ, quartæ &c. Ad ſimplicem.

C :	D	E	
3 a.	n 4	x 5	
—			
5 b	p 6	z 7	
	anx	nx	
G	—		I
	bpz	pz	

DAta ſit fractio tertia C; D, E. reducenda ad ſimplicem. Fractio ſecunda D, E reducatur ad ſimplicem, I. Igitur jam C eſt fractio fractionis I. Rurſum igitur fractio ſecunda C, I reducatur ad ſimplicem G. Erit hæc æqualis datæ fractioni tertiæ, C. D. E. ut ex conſtructione ipſâ patet.

Operatio tota abſolvitur hunc in modum; numeratores in invicem ducti *a*, *n*, *x*, faciant *anx*: numeratores verò *b*, *p*, *z*, gignant *bpz*. fractio G indè nata quæſitum exhibet.

CAPUT IX.

Fracti Decimales.

LOgiſtica fractorum numerorum, cujus tam praxim, quàm theoriam jam expoſuimus, quamvis ſcitu & neceſſaria, nec injucunda ſit: tamen in calculo longiori, & ſæpiùs repetendo, quantum faceſſat negotii, ſciunt omnes, qui numeros tractant. Verùm quemadmodum dividendi labor per Neperi laminas rabdologicas, & logarithmos propè omnis evanuit; ita moleſtiis fractorum Simonis Stevinii præclaro invento liberati ſumus. Is enim docuit loco fractionum vul-

vulgarium decimales adhibere. quas inſigni compendio ita prorſus tractare liceat, ac ſi integri eſſent numeri. Hoc verò inventum ſuum auctor nec ſatis exactè ac planè expoſuit, nec demonſtravit: neque enim cùm demonſtrare ſe dicit, aliud agit, quam exemplum afferre. Utrumque ſupplere conabimur.

Quid ſint, & quomodo ſcribantur.

$\frac{3}{10}$ a

$\frac{7}{100}$ b

FRactiones, ſeu numeri decimales ſunt totius cujuſpiam partes decimæ, centeſimæ, milleſimæ &c. denominatæ videlicet à numeris progreſſionis decuplæ ab, 1, incipientis, 10, 100. 1000 &c: quæ quidem more communi ita ſcriberentur, ut *a*, id eſt tres decimæ: ut *b*, id eſt ſeptem centeſimæ. Sed quia horum fractorum nominatores non aliis notis conſtant, quàm unitate & cifris, expeditior calculus redditur, ſi non infra numeratores, ſed ſupra ipſos, ut fit in ſcrupulis aſtronomicis, exprimantur ſignis quibuſdam, quæ hic vides expreſſa.

Decimæ. Centeſimæ. Milleſimæ. Decimilleſ. Centimill. &c.

Signa.	I	II	III	IV	V	&c.
Valor.	10	100	1000	10000	100000	

I	II	III	IV	V	VI
3	4	6	2	9	4
a	b	c	d	e	f

Igitur Decimalium *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* hic valor eſt: *a*, tres decimæ: *b*, quatuor centeſimæ: *c*, ſex milleſimæ: *d*, duæ decimilleſimæ: *e*, novem centimilleſimæ: *f*, quatuor millioneſimæ.

mæ. Quod ſi notis ſignatis aliæ non ſignatæ ad ſiniſtram adhæreant, ut *g*, *h* integros illæ numeros deſignant.

		I	II
8	3.	2	I
g	h.	k	l

Cùm igitur fractio decimalis exprimenda eſt, duo ſcribuntur, numerus & ſignum. Numerus ſignificat, quot partes decimales ex toto accipiantur; ſignum; quales.

Finis Decimalium

Est, omnes operationes arithmeticas ad uſum humanæ vitæ pertinentes, ſine fractis abſolvere.

Modus utendi exponetur infra cap. 15.

CAPUT X.

Requiſita quædam ad demonſtrationem Arithmeticæ decimalis.

SI methodicè procedatur facilis reddetur operationum decimalium demonſtratio.

Definitiones.

I	II	III
2	3	4
a	b	c

1. Notæ ſignis affectæ non æſtimantur ex loco, (hoc eſt juxta loci valorem) ſed ut ſimplices (hoc eſt, ac ſi ſingulæ primo ſtarent loco.) Itaque ſi dentur decimales notæ *a*, *b*, *c*, licèt *a* tertio loco conſiſtat, decimas ſignificat, non 200, ſed duas: ſimi-

ſimiliter 3, licèt exiſtat loco ſecundo, centeſimas ſignificat, non 30, ſed tres.

I II
48. 29
pq. ab

2. Integri verò numeri, qui decimalibus adhærent, eodem valore æſtimandi, quo, ſi decimales abeſſent, æſtimarentur. Sic notas *p*, *q*, licèt præcedant notæ decimales, *a*, *b*, valet quadraginta octo, non verò 4800.

II
6 6 n
e ——
100 m

3. Cùm nota decimalis ſcribitur modo conſueto fractionum vulgarium, denominator præter unitatem habet tot cifras, quot indicantur à ſigno. Sic nota decimalis *e*, vulgari modo ſcripta eſt fractio *n*, *m*, cujus nominator *m* habet duas cifras, tot nimirum, quot à ſigno deſignantur.

III
K 3
1000

4. Valor ſigni decimalis eſt unitas cúm tot cyfris quot indicantur à ſigno, ut ſi detur numerus decimalis *k*, valor ſigni eſt 1000.

Patet ex defin. 3.

Axioma.

	C
B	I II III
23	0 0 0
I	II III IV
57	0 0 0
B	C

SI numero cuicunque (B) ſive is ſit purè integer, ſive ex integro & particulis decimalibus compoſitus, adjiciantur cifræ C ſignis decimalibus affectæ, ejus valorem illæ non immutabunt. Nam neque cifræ ipſæ ullum ex ſe valorem habent, neque integro B præpoſitæ, ejus locum attollunt, ut patet ex defin. 2. Axioma illuſtrabitur infra.

Pari

	I		IV	
A.	4.	3	5	
I	II	III	IIII	IV
4	3	0	0	5

Pari modo cùm ſeries decimalis (A) interrupta eſt, ſi ea per cifras interpoſitas continuetur, valor dati (A) non immutatur.

THEOREMA I.

P*Articulæ decimales* (a, b, c, d) *æquivalent fractioni* (O) *cujus numerator ſunt ipſæ notæ datæ* (a, b, c, d) *ſignis abjectis & juxta loci valorem æſtimatæ; nominator verò ipſe maximi ſigni valor; hoc eſt unitas cum tot cifris, quot à ſigno maximo* (IIII) *indicantur.*

D*Emonſt.* Decimales nume-i *d*, *c*, *b*, a ſcribantur explicitè: hoc eſt, fiant fracti E, F, G, H, quorum numeratores ſint ipſæ notæ ſimpliciter acceptæ, nominatores verò ſint valores ipſi ſignorum. Fiant deinde alii fracti I, K, L, M, quorum nu-

I	II	III	IV
7	2	3	4
a	b	c	d

$$\frac{7234}{10000}\ O$$

$$\frac{4}{10000}\ E \qquad \frac{4}{10000}\ I$$

$$\frac{3}{1000}\ F \qquad \frac{30}{10000}\ K$$

$$\frac{2}{100}\ G \qquad \frac{200}{10000}\ L$$

$$\frac{7}{10}\ H \qquad \frac{7000}{10000}\ M$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 30 \\ 200 \\ 7000 \\ \hline 7234 \end{array}$$

mera-

meratores ſint eædem notæ, ſed ſecundùm loci valorem æſtimatæ, nominator verò communis ſit valor ipſe ſigni maximi.

I	II	III	IV
7	2	3	4
a	b	c	d

$\frac{7234}{10000}$ O

$\frac{4}{10000}$ E $\quad \frac{4}{10000}$ I

$\frac{3}{1000}$ F $\quad \frac{30}{10000}$ K

$\frac{2}{100}$ G $\quad \frac{200}{10000}$ L

$\frac{7}{10}$ H $\quad \frac{7000}{10000}$ M

Oſtendam fractos I, K, L, M, æquales eſſe fractis E, F, G, H. Comparemus duos L & G. Quoniam locorum valor ſecundùm progreſſionem decuplam

4
30
200
7000
7234

procedit à dextra in ſiniſtram; valor autem ſig- norum decimalium eâdem progreſſione decup procedit à ſiniſtra in dextram, manifeſtum e quod valor notæ *b* ex loco æſtimatæ, (numera- tor videlicet (200) fractionis L) ita excedat va- lorem ſimplicem ejuſdem notæ *b* (hoc eſt nume- ratorem fractionis G) ut valor ſigni maxi (IV) (ipſe videlicet fractionis L nominator) excedit valorem ſigni (II) quo ſignata eſt no- ta *b*, (hoc eſt ipſum nominatorem fracti G. Ergo per th. 2. c. 2. fracti L & G æquales ſu Simili planè argumento, I & E: K & F; M & æquales erunt. Atqui fractiones I, K, L, M co ficiunt fractionem O, quia (10000) valor ſi ni maximi (IV) eſt communis earum deno- nator, numeratores verò earum collecti faci

723

7234, ut per ſe patet. Ergo etiam fracti E, F, G, H hoc eſt decimales dati *d, c, b, a*, conficiunt fractionem O. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 2.

SI *integro numero* (m, n) *adhæreant decimales particulæ* (a, b, c) *integer cum decimalibus æqualis erit fracto* (P) *cujus numerator ſint omnes notæ datæ* (m, n, a, b, c) *ſignis, ubi adſunt, abjectis, & juxta loci valorem acceptæ; nominator verò ipſe maximi* (III) *ſigni valor* (1000.)

```
    I II III
  2 3. 5 4 9
  m. n. a b c

f 32000        549 d
e 1000        1000 e

  549
32000        32549 h
32549         1000 e
                 P
```

Demonſt. Per theor. 1, decimales *a, b, c* ſunt æquales fracto *d, e*. Quod ſi integro *m, n* ducto in *e* fiat *f*, & ſubſcribatur *e*, ut fiat fractus *f g*, erit is par integro *m, n* per prob. 5. cap, 3. Sed fracti *f, e* & *d, e* conficiunt fractum P, cùm enim nominator *e* ſit communis, ſoli numeratores *f, d* ſunt addendi, quorum ſumma neceſſariò ſemper conſtat notis datis *m, n, a, b, c*, ut patet vel leviter rem expendenti. Ergo etiam integer *m, n* cum decimalibus *a, b, c* conficiunt fractum P. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 3.

	I IV		II V
a	2 3	a	5 2 7 5
	I II III IV		I II III IV V
c	2 0 0 3	c	5 2 0 7 0 0 5

$\frac{2\,0\,0\,3\ c}{1\,0\,0\,0\,0\ d}$ $\quad$ $\frac{5\,2\,0\,7\,0\,0\,5\ c}{1\,0\,0\,0\,0\,0\ d}$

Cum decimalis progreſſio a *interrupta eſt, tunc cifris interpoſitis interruptio progreſſionis tollatur, ut fiat* c; *&* *ſignis abjectis, infra* c *ſcribatur* d *maximi* (IV) *ſigni valor. Fractio* c, d *erit æqualis* a.

Demonſtratio eadem eſt quæ, 1, & 2 theoremate.

Coro arium.

	I		I II III IV
d.	3 5	f	3 5 0 0 0
g.	3 5	k	35000
h.	1 0	m	10000

EX his ampliùs declarabitur axioma ſupra poſitum. Eſto *d*, cui adjiciantur tres cifræ ſignis notatæ ut fiat *f* per theor. 2. æquatur fracto *g*, *h*; *f* verò fracto *k*, *m* per idem theor. Quot verò cifris *k* excedit *g*, totidem quoque cifris neceſſariò *m* excedit *h*. Ergo per theor. 1. cap. 3. l. 1. *k* eſt ad *g*, ut *m* ad *h*: & permutando *k* eſt ad *m*, ut *g* ad *h*. Ergo per theor. 2. cap. 2. lib. 2, fracti *k*, *m* & *g*, *h* æquales ſunt. Quare cùm *k*, *m* ſit *f*, & *g*, *h*, ſit *d*, etiam *d* & *f* æquales ſunt.

Eſt quidem id per ſe manifeſtum, undè & tanquam axioma propoſui. Viſum eſt nihilominus, quia maximus hujus axiomatis uſus erit, declaratiunculam iſtam apponere.

CAPUT XI.

Additio Decimalis.

	I II III IV		I II III IV
A	3 5 2 4 7 1	D.	3 5 2 4 7 1
B	8 6 1		I II III IV
		E	8 6 1 0 0 0 0
	II IV		I II III IV
C	7. 4 9	F	. . 7 0 4 0 9
			I II III IV
		G	9 0 3 2 8 8 0

I $\frac{352471}{10000.p}$ K $\frac{8610000}{10000.p}$ L $\frac{70409}{10000.p}$

N $\frac{9032880.g}{10000.p}$

AD dedi offerantur, A, B, C. Ubi ſignorum progreſſio vel interrūpitur, ut in C, vel deficit ut in B, eã aut cyfris interpoſitis ut in F, aut cyfris adjectis ut in E, continuetur. *per axioma.* Quâ quidem ſuppletione valor ipſius C aut B non immutatur. Tunc ſimilia ſcribantur ſub ſimilibus, eo ordine, quem vides in D, E, F. Peragatur deinde additio, ac ſi omnes eſſent numeri integri. Summæ G notas primas iiſdem ſignis affice, eritque hæc ſumma quæſita.

Demonſtr. Per theoremata ſuperiori capite demonſtrata, D, E, F æquantur fractis I, K, L quorum numeratores ſunt ipſi D, E, F abjectis ſignis accepti ut integri, nominator verò communis *p*, maximi ſigni valor. Sed ut horum fractorum habeatur ſumma, tantùm opus eſt addere numeratores, hoc eſt ipſos D, E, F, tanquam integros, & ſummæ ſubſcribere nominatorem communem *p*. Ergo etiam ut habeatur ſumma datorum D, E, F, tantùm opus eſt ipſos D, E, F acceptos velut integros addere, & ſummæ *g* ſubſcribere *p*, maximi ſigni valorem, ut ſumma habeatur fractio N. Sed fractio N per theoremata cap. præc. æqualis eſt ſummæ G: nam ejus numerator conſtat iiſdem notis quibus G, & nominator *p* eſt ipſe maximi ſigni (IV) valor, per hyp. utrobique. Ergo G eſt ſumma quæſita datorum D, E, F, ſeu A, B, C. Quod erat propoſitum.

Patet ex. c. 4. n. 1.

Quamvis interruptio ſignorum in praxi vix unquam, aut rarò offeratur, nihilominus ut plena habeatur cognitio Logiſticæ decimalis, etiam hunc caſum tum hìc, tam deinceps proponere ac demonſtrare voluimus.

C At

CAPUT XII.

Subtractio Decimalis.

	I II		I II III IV V
A	9 8 4 2	C	9 8 4 2 0 0 0
	II III V		I II III IV V
B	4 5 9 4	D	4 0 5 9 0 4
			I II III IV V
		Q	9 4 3 6 0 9 6

E $\frac{9842000}{100000.\ p}$ F $\frac{405904}{100000.\ p}$

T $\frac{9436096.\ q}{100000.\ p}$

OPorteat ſubtrahere B ex A. Integer minor ſubſcribatur majori ut ſolet. Tum decimales ſimiles ſub ſimilibus collocentur, & loca ſignis vacantia, tam in principio, ut in A, quàm in medio, ut in B, cyfris ſignatis ſuppleantur, ut factum vides in C & D. Quâ quidem ſuppletione datorum A & B valor non immutatur, per axioma. Subducatur deinde D ex C perinde ac ſi ambo toti eſſent numeri integri ſeu abſoluti. Reſidui verò Q primæ notæ iiſdem ſignis afficiantur. Erit hoc reſiduum quæſitum.

Demonſtratio. Per theoremata cap. 10. C, & D æquantur fractis E & F, quorum numeratores ſunt ipſi C, & D accepti ut integri, nominator verò communis *p*, ipſe valor ſigni communis maximi. Ut autem F ſubtrahatur ab E tantùm opus *Patet ex.* numeratorem à numeratore ſubtrahere, hoc eſt *c. 5. n. 1.* D tanquam integrum ab C tanquam integro, & reſiduo ſubſcribere communem nominatorem *p*, maximi nempe ſigni valorem. Ergo ut D ſubtrahatur à C, hoc eſt, per axioma, A ex B, etiam

 tantùm

tantùm opus erit D tanquam integrum ſubducere à C tanquam integro, & reſiduo Q ſubſcribere *p* maximi ſigni valorem, ut habeatur reſiduum fractus T. Sed fractus T per theorema 2, æquatur Q, nam per hypotheſim & numerator *p* iiſdem conſtat notis, quibus Q, & nominator *p* eſt valor ſigni maximi. Ergo etiam fractus T eſt reſiduum quæſitum. Quod erat propoſitum.

CAPUT XIII.

Multiplicatio Decimalis.

Detur multiplicandus A per B. Nulla ſignorum habitâ ratione ita multiplicatio inſtituatur,

I III			
7 4	A	G	H
I II III		704	52
7 0 4.	A	1000. e	10. p
I			
5 2.	B		
I II III IV		3 6 6 0 8 k	
3 6 6 0 8 C		1 0 0 0 0 f	
		N	

ac ſi A & B eſſent integri numeri, ſublatâ priùs per cifras interpoſitas (ut in A ſecundo) progreſſionis decimalis interruptione, ſiquæ eſſet. Maxima deinde datorum A, B numerorum ſigna ſibi adde. Eorum quippe ſumma dabit (IV) ſignum maximum, quo producti C nota prima ſignari debeat, indicabitque pariter, quot notæ ſignis ordine decreſcentibus ſint afficiendæ.

Demonſtr. Per theoremata cap. 10. A & B æquantur fractis G, & H, quorum numeratores ſunt ipſi A & B accepti tanquam integri, nominatores verò ipſi valores maximorum ſignorum A & B. Atqui ut hi fracti G & H inter ſe multiplicentur, tantùm opus eſt ut numeratores eorum, hoc eſt A & B accepti tanquam integri, invicem multiplicantes, novum faciant numeratorem *k* (ipſum nempe C ſignis abjectis) cui deinde ſubſcribatur nominator *f*, conſtans unitate & cifris *e*, *p* ſimul ſumptis, valor ſcilicet utriuſque ſigni maximi A, B. Ergo etiam ut decimales A, & B invicem multiplicent, tantùm opus eſt ut A & B accepti tanquam integri invicem multiplicantes faciant numeratorem *k*, cui ſubſcribatur nominator *f*, ipſe nimirum valor utriuſque ſimul maximi ſigni A, B, ut habeatur productum, fractio N. Atqui per theor. 2. cap. 10. N æqualis eſt C, nam & numerator *k* iiſdem conſtat notis, quibus C, & nominator *f* conſtat unitate & cyfris, *e*, *p*, hoc eſt per hyp. tot cyfris, quot deſignantur ab utriſque ſimul maximis ſignis A, B; hoc eſt per conſtr. tot cyfris, quot indicantur à ſigno maximo C. Ergo etiam C eſt productum quæſitum ex multiplicatione datorum A, & B. Quod erat demonſtr.

Si datorum unus eſt numerus integer, cui nulli adhæreant decimales, producti nota prima ſignabitur ſigno maximo alterius dati, & reliquæ ſignis ordine decreſcentibus.

CAPUT XIV.

Diviſio Decimalis.

I IV V
A 2 5 8 7 9
I II III IV V — I II
A 2 5 8 0 0 7 9 — B 5 7 3
III IV V — I II III
X 4 3 3 (4 5 0 2 C

D $\frac{2580079 \; p}{100000 \; f}$ E $\frac{573 \cdot q}{100 \cdot g}$

Z $\frac{433}{100000}$

N $\frac{4502 \; h}{1000 \; k}$

OPorteat A dividere per B. 1. Progreſſionis decimalis interruptio, ſiquæ ſit, cyfris interpoſitis, tollatur (ut in A ſecundo.) Divide deinde A per B, perinde ac ſi ambo eſſent integri. Si jam diviſoris B ſignum maximum minus eſt ſigno maximo dividendi A, ab hoc illud aufer: ſigno reſiduo (I I I) notabitur nota prima quotientis C, reliquæ verò ſignis ordine decreſcentibus.

I II III IV — I II
k 2 3 0 0 0 — m 5 6
I — I II
h. 2 3 — n (4 1 0

Quod ſi (*m*) diviſoris maximum ſignum majus ſit ſigno maximo (*h*) dividendi aliquot cyfris dividendo adjectis, ut in (*k*) ſigna quæ deſunt ſuppleantur, donec ſubductio fieri poſſit.

Idem

1 1 1
.8 2 5
1
.9 4 2

Idem fiat cùm diviſor (q) eſt abſolutè major dividendo (p) quomodocunque ſigna ſe habeant.

Demonſtr. Per theor. 2. cap. 10. Dati A & B æquantur fractis, D, & E, quorum numeratores p & q ſunt ipſi A, & B accepti tanquam integri, nominatores verò, f & g, valores ipſi maximorum ſignorum (v & 11) Atqui ut D dividatur per E, oportet ſolummodo p dividere per q, (hoc eſt A tanquam integrum per B tanquam integrum) & f dividere per g, quod fit auferendo cyfras g à cyfris f, hoc eſt ſignum maximum dati B, à ſigno maximo dati A. Ergo etiam ut A dividatur per B, oportet ſolùm A acceptum ut integrum, dividere per B ut integrum, & quotienti h ſubſcribere unitatem cum cyfris, quæ reſtant cyfris g ablatis à cyfris f, ut ſic habeatur pro quotiente fractio N. Sed per theor. 2. cap. 10. fractio N æqualis eſt C, nam & numerator h iiſdem conſtat notis quibus C, (nati enim ſunt ex eorundem numerorum diviſione) & nominator k, ut mox oſtendam, eſt valor maximi ſigni ipſius C. Ergo C eſt quotiens ortus ex diviſione A per B. Quod erat demonſt. Quod autem k ſit valor maximi ſigni quotientis C, ſic oſtendo. Per conſtr. ſignum maximum C eſt id, quod remanſit ſigno maximo ipſius B ablato à ſigno maximo ipſius A. Atqui g & f ſunt valores maximorum ſignorum A, & B, ac proinde per defin. 4. totidem conſtant cyfris quot indicantur à ſignis maximis ipſorum A, & B. Manifeſtum eſt igitur cyfris g ablatis ex cyfris f remanere k valorem ſigni maximi quotientis C.

In

In altero caſu, quo cyfræ dividendo *b* ſunt adjiciendæ ut fiat, *k*, ſic demonſtrabimus. Per 1. partem jam demonſtratam *m* dividat *k* & producat quotientem *n*. *k* æquatur *b* per axioma. Atqui *m* dividens *k* fecit quotientem *n*, Ergo etiam *m* dividens *b* gignet quotientem *n*: quod erat demonſt.

Porrò ex conſtructione jam traditâ patet, cùm diviſor eſt integer, quotientem iiſdem ſignis notari, quibus dividendus: item cùm diviſoris & dividendi ſigna maxima æqualia ſunt, quotientem eſſe integrum totum.

2. Si diviſione peractâ aliquid ſuperfuit, ut in exem. 1, ſuperfuit X, ejus notæ iiſdem ſignis notandæ, quibus totidem primæ notæ dividendi A.

Demonſtr. Nam A eſt D, & B eſt E: E verò dividens D relinquit Z, hoc eſt X per theo. 1. cap. 10. Clara ſunt iſta, ſi prior demonſtratio fuerit intellecta.

I II III IV V I II
A. 2 5. 8 0 0 7 9 B 5. 7 3
III IV V | VI VII VIII (I II III | IV V VI
X. 4 3 3 | 0 0 0 (4. 5 0 2 | 7 5 5
t C r
VI VII VIII
V. 3 5 5

3. Si reſiduum diviſionis adhuc alicujus momenti ſit, adjiciantur ei aliquot cyfræ decimales, & diviſio continuetur, ut num. 1. traditum eſt.

Ex diviſione A per B ſuperfuit X. Hoc ſi placuerit ulteriùs exhaurire, adjice aliquot cyfras

ſras ſignatas ut fiat X *t*, quod divide ut num. 1. & quotientem indè natum *r* adſcribe quotienti C; erit C *r* quotiens ex diviſione A, per B. V quod ...um ſupererit, jam multò erit minus priori reſiduo X ſeu *z*, ut patet ex n. præced. & hoc ipſum pluribus adjectis cyfris aut penitus evaneſcet, aut certè fiet quovis dato minus.

Demonſtr. Quoniam valor reſidui X adjectis cyfris *t* non immutatur, X *t* æquivalebit ſoli X. Atqui X *t* diviſo per B provenit quotiens *r*. Ergo etiam X *t* diviſo per B proveniet quotiens *r*. Atqui ex A minus X, diviſo per B provenit quotiens C (nam A diviſo per B ſuperfuit X.) Ergo ex A toto diviſo per B provenit quotiens C *r*.

Praxim paucis ſic complector. Ad reſiduum ex diviſione decimali adjectis aliquot cyfris diviſionem proſequere, & notas quotienti primo accedentes nota ſignis ordine creſcentibus.

Corollaria.

1. EOdem planè artificio poterit evaneſcere reſiduum ex diviſione integri per integrum; eademque erit demonſtratio.

3 a 1 11 111
7 b f. 3 0 0 0

1 11 111
d (4 2 8

2. Quævis fractio eodem artificio reducetur ad partes decimas. Detur fractio *a*, *b*. Numeratori *a* aliquot cyfras adjice, eumque ſic auctum divide per nominatorem *b*, ut traditur num. 1. Quotiens *d* æquivalet fractioni *a*, *b*.

Nam quia per axioma, *a* & *f* æquales ſunt, etiam *b* illos dividens, quotientes æquales dabit. Atqui

Atqui *b* dividens *a*, dat quotientem *a*, *b*, per corollar. 2. theor. 1. cap. 1. dividens autem *f*, dat *d*. Æquantur ergo *a*, *b* & *d*.

Reductio fractionis datæ etiam continetur probl. 3. cap. 3.

CAPUT XV.

Uſus Decimalium numerorum.

1. MEnſuræ & pondera dividantur in 10 partes æquales, & ſingulæ decimæ rurſum in alias æquales 10, quæ jam erunt centeſimæ totius: Atque harum ſingulæ iterum in 10, quæ proinde jam erunt milleſimæ totius. Menſuris hunc in modum diviſis, ſi utamur in dimenſione quacumque linearum, planorum, ſolidorum, liquidorum, ponderum, &c; nuſquam calculo fractiones ſeſe ingerent, ſed earum loco integris numeris adhærebunt particulæ decimales, quas licebit tractare ut integros numeros, quemadmodum per plura jam capita explicavimus.

B		C
I II III		14 | 560
7 2 8		$\frac{}{20}$
$\frac{728}{1000}$	A	$\frac{14}{20}$

Quod ſi ſub finem totius operationis, lubeat decimales particulas reducere ad fractionem denominationis datæ; exempli gr. ſi lubeat cognoſcere, par-

particulæ B, unius virgæ 20 pedum quot pedes
juſdem virgæ conficiant, quæſitum facillimè
btinebitur hunc in modum. Denominator da-
us 20 multiplicans 728 faciat 14560, à quo au-
er tot primas notas (560) quot indicantur à
igno maximo decimali, ſive quot ſunt dati de-
imales. Reſiduum 14 eſt numerator quæſitus.
gitur particulæ B efficiunt unius virgæ 20 pe-
lum partes C, nempe quatuordecim vigeſimas,
hoc eſt faciunt pedes 14.

Demonſtr. Fractio A, cujus numerator iiſdem
notis conſtat quibus B, denominator verò præ-
ter unitatem habet tot cifras quot deſignantur
à ſigno maximo ipſius B, per th. 1. cap. 10. æ-
quatur B. Sed per prob. 3. cap. 3, ut fractio A
reducatur ad denominationem 20, numerator
728 ducendus eſt in 20 & productum 14560
dividendum per denominatorem 1000, quod fit
auferendo tot primas notas, quot ſunt cifræ in
1000, hoc eſt quot indicantur à ſigno maximo
ipſius A. Liquet ergo veritas operationis præ-
ſcriptæ.

2. Circumferentia circuli dividatur quidem
in partes ſeu gradus 360; at gradus ſinguli
non in 60, ſed in 10 æquales partes ſecentur:
Tum ſingulæ decimæ unius gradus in alias 10,
quæ jam erunt unius gradus centeſimæ. Hæ rur-
ſum ſingulæ in 10, quæ jam erunt unius gradus
milleſimæ, & ſic deinceps. Quòd utinam Aſtro-
nomis placuiſſet, aut certè deinceps placeret!
profectò longè expeditior evaderet calculus, to-
ties hoc in ſtudio adhibendus.

3. Ple-

3. Plerumque expediet, juxta 1. corol. ſuperius, cujuſcunque diviſionis reſiduum decimalibus cyfris adjectis exhaurire, aut fractiones integris jam adhærentes in decimales convertere, ut coroll. 2. traditur, quando multæ cum fractis illis erunt operationes inſtituendæ: ſi una alterave tantùm, vix operæ pretium fuerit reductionem tentare.

ARITH-

ARITHMETICÆ PRACTICÆ.

LIBER III.

De Radicum extractione.

PRæcipuum Arithmeticæ practicæ problema eſt, radicis ex poteſtate datâ extractio. Poteſtas autem eſt numerus ex alicujus numeri ſæpius poſiti, ſive ex æqualium numerorum multiplicatione procreatus. Radix eſt ipſe numerus qui multiplicatus poteſtatem genuit. Unaquæque verò poteſtas tot dicitur habere dimenſiones, quot habet latera, ſive quot æquales numeri ad ejus geneſim requiruntur. Quadratus numerus appellatur, qui producitur ex quovis numero in ſe ipſum ducto, ſive ex multiplicatione duorum æqualium numerorum. Talis eſt 4, qui fit ex 2. per 2: & 9. qui fit ex 3 in 3. & 16, qui fit ex 4 in 4. &c.

Cubus dicitur qui fit ex trium numerorum æqualium multiplicatione, ſive ex numero bis in ſe ducto. Talis eſt 8, qui fit ex 2, 2, 2, nam 2 in 2 facit 4, & 4 in 2 eſt 8.

Biquadratus ſeu quadrato quadratus eſt, qui fit ex multiplicatione quatuor æqualium numero-

rorum, ſive ex numero in ſeipſum ter ducto. Talis eſt 16, qui fit ex, 2, 2, 2, 2: nam 2 in 2 eſt 4; & 4 in 2 eſt 8, & 8 in 2 eſt 16.

Superſolidus eſt, qui fit ex multiplicatione 5 æqualium numerorum ſeu ex numero in ſe quater ducto. Atque hunc in modum reliquæ in infinitum poteſtates procreantur. Lege ſcholium noſtrum p. 8. l. 9. in quo cætera huc neceſſariò pertinentia reperies.

Poteſtatis verò cujuſque radix ab ipſa poteſtate denominatur. Hinc radix quadrata, radix cubica, quadratoquadrata, ſuperſolida, &c, Singularum characteres ſeu ſigna hic adjungo.

R. vel

R. 2) radix quadrata.

R. 3) radix cubica.

R. 4) radix biquadrata.

R. 5) radix ſuperſolida.

Et ſic in infinitum.

Exempla nonnulla ſubjicio.

R. 12) vel R 2) 12, eſt radix quadrata numeri 12.

R. 3) 25. eſt radix cubica numeri 25. & ſic deinceps in aliis.

Porrò expediet plurimùm huic negotio radicum eliciendarum, geneſim poteſtatum etiam exprimere multiplicatione ſpecioſâ, quæ ſolâ litterarum appoſitione peragitur. Conſule, quæ monui

Radix	a	
Quadrat.	aa	
Cubus.	aaa	
Quadquadr.	aaaa	
Surſolid.	aaaaa	

monui ante lib 7. Eucl. *a* in *a* facit *aa* quadratum, & *aa* in *a* facit cubum *aaa*, & *aaa* in *a* facit quadrato quadratum *aaaa*.

Et ſic deinceps.

CAPUT I.

Radicis Quadratæ Extractio.

Extrahenda ſit radix quadrata ex numero A.

```
A 56, 70, 09  (753
  49                14
     7, 70
     7  25          150
        45, 09
        45  09
             0.
```

I. Poſt binas quaſque notas, à dextris ſumpto initio, comma aut punctum interpone, eritque numerus datus in membra ſectus, binis notis conſtantia, præter ultimum, quod unicâ conſtare poteſt. Quot verò erunt membra tot notis conſtabit radix quæſit.

2. Præſidio tabellæ hic appoſitæ, quâ notarum ſimplicium quadrati continentur, quære poſtremi membri (56) radicem quadratam, aut ſi (quod hic contingit) quadratus non ſit, radicem quadrati proximè minoris; ut quia ultimum membrum 56 quadratus

Rad.	Quad.
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81.

non eſt, quære quadratum proximè minorem 49, ejuſque radicem 7 ſcribe poſt lunulam: erit hæc nota ultima radicis quæſitæ. Quadratum verò 49 aufer ex membro 56, & reſiduum 7 ſcribe infrà lineam. Hæc operatio ſingularis eſt, neque ampliùs repetitur.

3. Reſiduo 7. adſcribe membrum penultimum 70 ut habeatur novum membrum totale 7, 70. Tum radix hactenus acquiſita 7 duplicetur. Ea ſic duplicata (14) diviſor appellabitur.

Quære quoties diviſor 14 contineatur in membro novo 7, 70 demptâ notâ primâ, nimirum in 77. Reperies contineri quinies. Scribe ergo 5 poſt lunulam. Erit hæc nota radicalis altera.

Multiplicet deinde nota radicalis jam reperta, 5, diviſorem 14; & fiat 70: eademque ſeipſam multiplicans faciat quadratum 25. Hæc duo producta collige in unam ſummam, numeris ita collocatis, ut vides in hac formulâ.

$$\begin{array}{r} 70 \\ \underline{25} \\ 725 \end{array}$$

Summam 725 aufer ex membro 7, 70, & reſiduum 45 ſcribe infra lineam.

Pote-

Poterit etiam multiplicatio inſtitui hunc in modum; diviſori 14, appone notam radicalem 5 ut fiat 145, quæ per ipſam radicalem notam 5 multiplica. Idem oriri productum quod priùs, patet ex p. 3. l. 2.

4. Hæc operatio in omnibus membris ſequentibus eodem prorſus modo repetitur.

Reſiduo 45 adſcribe membrum antecedens 09 ut habeatur totale novum 45, 09. Tum radicem hactenus acquiſitam 75 duplica ut fiat diviſor novus 150. Quære quoties hic contineatur in membro 45, 09 demptâ primâ notâ, nimirum in 4, 50. Reperies ter. Scribe ergo notam 3 poſt lunulam. Hæc deinde diviſorem 150 multiplicans faciat 450; multiplicans verò ſeipſam faciat 9. Hæc duo producta adde, numeris, ut in adjectâ hic formulâ, collocatis. Summam 4509 aufer ex membro 4509, & quia nihil remanet, erit A numerus quadratus, ejuſque radix 753.

```
450
  9
----
4509
```

Quod ſi poſt ultimam ſubtractionem aliquid remaneat, numerus, qui proponitur, quadratus non eſt: quadratus autem fit, ſi mulctetur reſiduo.

5. Quando factâ multiplicatione nequit fieri ſubtractio radicalis nota ultimò reperta, per quam nimirum facta eſt multiplicatio, minuenda eſt, donec ſubtractio fieri poſſit.

Eſto radix elicienda ex 784. Quadratum proximè minus ultimo membro 7, eſt 4, & radix ejus, 2, ſcribenda poſt lunulam. Ejus quadratum 4 aufer ex membro 7, & reſtant 3, quæ

```
7,84   (2 9 8
4       4
----
3,84
3 84
----
   0
```

ſubſcribe, adjecto membro 84. Radicalis 2 duplicata dat diviſorem 4, qui in novo membro 3, 84 demptâ primâ notâ, hoc eſt in 38, continetur novies. Scribe ergo 9 poſt lunulam 9 in 4 facit 36. 9 in 9 facit 81. Hæc producta adde numeris collocatis, ut in hac formula. Summa 441 auferri nequit ex membro, 3, 84. Rejectis igitur 9 ſubſtitue 8, & denuo multiplica. 8 in 4 facit 32 8 in 8 facit 64. Summa eſt 384, quæ auferri poteſt.

36
81
―
441

6. Quando diviſor in membro primâ notâ mulctato ne ſemel quidem continetur, ſcribatur cyfra poſt lunam, & membro illi nimis parvo, membrum proximum adjiciatur.

Eſto radix elicienda ex C. ex membro primo 4, elicitur nota radicalis 2, cujus quadrato 4, ablato à membro 4, remanet o, cui adſcripto proximo membro 15, fit membrum novum 015 ſeu 15. In hoc primâ notâ 5 mulctato, nempe in 1. nota radicalis 2 duplicatâ, nempe 4, ne ſemel quidem continetur. Scribe igitur, o, poſt lunulam, & membro 15 nimis parvo adjice 16 membrum antecedens. Tum per omnia, ut priùs, operaberis, radicem videlicet hactenus acquiſitam 20 duplicabis, &c.

C 4, 15, 16. (20
4 4
―
o, 15
15, 16

7. Quando membrum ultimum eſt, 1, vel 2 vel 3, ſcribenda eſt unitas poſt lunulam, & ſubtrahenda ex membro.

CAPUT II.

Radicis Quadratæ Demonſtratio.

NEminem hucuſque legi, qui extractionis radicum quadratæ ac cubicæ demonſtrationem perſpicuam & integram exhiberet. Appellant quidem ferè omnes prop. 4. l. 2. Elem. Sed difficultas tota in applicatione conſiſtit, quam vel omittunt, vel tam imperfectè exequuntur, ut pleraque extractionis myſteria in tenebris relinquant. Res interim eſt ſcitu digna inprimis, quæque ſubtilitatis habeat non parum; ejuſmodi tamen, ut ex iis, quæ hoc & 4 capite allaturi ſumus, clarè intelligi poſſe exiſtimem.

PORISMA I.

NUllus quadratus numerus in principio cyfras habet impares.

Demonſtr. Radix quæcunque quadratum generans vel cyfras habet in principio, vel non habet. Si habet quemadmodum A, manifeſtum eſt, ut A ducatur in A, ſolas notas ſignificativas in invicem duci, & producto præponi cyfras duplo plures, quàm ſint in A radice. Ergo

A	2 3 0
A	2 3 0
	52900 B

productum, hoc eſt (ut patet ex def. 28. l. 7.) Ipſe quadratus B, pares habet in principio cyfras.

Si non habet cyfras in principio (ut C) tum ut C ducatur in C, debet prima nota (9) quæ jam ponitur non cyfra eſſe ſed nota ſignificativa, duci in ſeipſam ut habeatur ejus quadratum, cujus prima nota in primo loco producti D ſcribenda eſt. Atqui nullius notæ ſimplicis quadratum, primam notam habet cyfram, ut patet ex tabella cap. præced. Ergo neque quadrati D, qui pro cujuſvis radicis compoſitæ quadrato ſupponitur, nota prima erit cyfra. Omnis igitur quadratus numerus, aut pares habet in principio cyfras, aut ejus prima nota omnino cyfra non eſt. Quod erat demonſtrandum.

C 4 3 9
C 4 3 9
192721 D

Corollarium.

Simili ratione ex ipſo opere multiplicationis manifeſtum eſt nullius quadrati numeri primam notam eſſe, 2, vel 3 vel 7, vel 8, ſed unam ex his 1, 4, 5, 9, 2, 0. Nam prima cujuſvis quadrati nota prima eadem eſt cum alicujus quadrati ſimplicis nota prima, quæ neceſſario eſt una ex his, 2, 4, 5, 6, 9, 0.

PORISMA 2.

P a b c
56,70,09
d e
49 | 00,00
| k
7 | o o
7 . o o
f , k

E*ſto numerus quicunque* P, *à dextra in ſiniſtram in membra ſeu partes* a, b, c *diſtinctus commate poſt binas quaſque notas interpoſito. Aſſumatur autem quo quodlibet membrum, exem. gr. ultimum* a, *& quadratus in eo ſimpliciter accepto deliteſcens ſit* d, *ejuſque radix* f. *Dico, ſi ante* d *ponantur tot cyfrarum binarii, quot ante membrum* a *membra antecedunt, ante* f *radicem verò toties una cyfra;* d, e *fore quadratum latentem in membro* a *juxta valorem loci accepto, & radicem ejus eſſe* f, k.

Demonſtr. Cum enim pro ſingulis membris anteſpoſita ſit una cyfra, ante *d* vero cyfrarum binarius; manifeſtum eſt cyfras *e* eſſe duplo plures cyfris k. Ergo *k*, *f* radix in ſe ducta faciet *d*, *e*; nam ut *f*, *k* ducatur in *f*, *k*, tantum opus eſt *f* ducere in *f*, unde fit *d* ex hypotheſi, & cyfras *k*, *k* ſibi mutuo apponere, quæ conflabunt cyfras *e*, cum duplæ ſint, ipſarum *k*. Ergo *d*, *e* quadratus eſt, ejuſque radix *f*, *k*. Liquet ergo quæſitum.

Corollaria.

HInc patet 1. in quolibet membro latere quadratum, & talem quidem, qualis in lemmate determinatur.

Patet 2. cur numerus ex quo quadrata radix elicienda eſt, ſecetur in membra binis notis conſtantia; & cur poſtremum membrum poſſit unica eſſe nota, quæ quidem ex ſequentibus patebunt adhuc clariùs.

PORISMA 3.

QUadratum binomii a † b, *ſive numeri in duas partes ſecti, eſt* aa † 2 abb † bb. *Hoc eſt quadratus ex* a, *& planus ex* a *in* b *bis ſumptus, & quadratus ex* b.

Patet ex p. 4. l. 2. Id ipſum cernitur ex opere ipſo multiplicationis ſpecioſæ, cujus paradigma appono.

	a b	a b	
a†b	20†3	2 3	20. a
a†b	20†3		3. b
aa†ab	400†60		
†ab†bb	†60†9		
Sum. aa†2 ab†bb.	400†120†9. Sum.		

Porro hæc multiplicatio nihil habet difficultatis, nam ut *a†b* ducatur in *a†b*, prima *a* multipli-

tiplicans totum *a*†*b*, producit *aa*†*ab*. Deinde †*b* multiplicans idem totum *a*†*b*, producit †*ab* †*bb*. Hæc duo producta addita faciunt *aa*†2 *ab* †*bb*. Quæ omnia per ſe manifeſta ſunt.

PORISMA 4.

E*Sto numerus*, Z *quotcunque conſtans partibus* Ex. *gr. in tribus* a†b†c. *Ejus quadratum eſt* aa†2 ab†bb †2 a†bc†cc; *hoc eſt quadratum ex* a; *planus bis ex* a *in* b; *quadratum ex* b; *planus bis ex* a *cum* b *in* c; *quadratum ex* c.

Demonſtr. Per poriſma præcedens quadratum ex *a*†*b*†*c*, æquatur quadrato ex *a*†*b* (per modum unius partis accepti) & bis facto ex a†b in *c* & quadrato ex *c*. Atqui quadratum ex *a*†*b* per idem poriſma eſt quadratum ex *a* unà cum bis facto ex *a* in *b*, una cum quadrato ex *b*. Ergo quadratum ex *a*†*b*†*c* æquatur quadrato ex *a*, bis facto ex *a* in *b*, quadrato ex *b*, bis facto ex *a*†*b* in *c*, quadrato ex *c*. Quod erat demonſtrandum.

a b c	a. 200	a † b † c
2 3 5	b. 30	200†30†5
Z	c. 5	

Corollarium.

QUadratum igitur numeri, in ſuas partes dirempti, componunt partium quadrati & dicti plani.

PORISMA 5.

QUadratus eſto quivis A, *ejuſque radix* B. *Sit autem quadratus* A *ſectus in membra binis notis conſtantia à dextra in ſiniſtram. Dico Radicem* B *tot conſtare notis, quot ſunt membra in quadrato* A.

A	B
56,70,09	(753
A	B
1,82,25,00	(1350

Demonſtr. Per poriſma 2. ejuſque coroll. quoniam in ſingulis membris dati A latet unus quadratus, patet tot eſſe membra in A, quot in A latent quadrati. Sed quia per poriſma 3. & 4 ejuſque coroll. in quadrato toto A, ſingularum notarum radicalium quadrati continentur, tot etiam notas continebit radix B quot in A ſunt quadrati. Ergo radix B tot continebit notas quot ſunt membra in A. Quod erat demonſtr.

PORISMA 6.

ESto numerus quadratus quicunque Z, *ejuſque radix quadrata* X. *Secetur autem* Z *in membra* h, g, f, e, *à dextra in ſiniſtram, poſt binas quaſque notas commate interpoſito.*

Z: e	f	g	h	(abcd	X
55,	33,	87,	21	7439	

e		a † b † c † d
55, 00, 00, 00	a. 700	7000†400†30†9
f	b. 400	
6, 23, 00, 00	c. 30	
g	d. 9	
57, 87, 00		
h		
1338, 21		

In ultimo membro *e* latet quadratus ſolus ultimi radicis ſegmenti *a*. In penultimo membro *f* unà cum reſiduo 6 membro ultimi *e*, latet quadratus, penultimi radicis ſegmenti *b*, una cum bis facto ex *a* in *b*. In antepenultimo membro *g*, unà cum reſiduo 57 membri *f*, latet quadratus antepenultimi radicis ſegmenti *c*, unà cum bis facto ex *a*†*b* (hoc eſt ex *a* & *b*) in *c*. In membro *h* una cum reſiduo 1338 membri *g*; latet quadratus radicis ſegmenti *d*, una cum bis facto ex *a*†*b*†*c* (hoc eſt ex *a* cum *b*, & *c*) in *d*. Et ſic deinceps ſi plura ſint membra.

Demonſtratio. Cum enim per poriſ. 5. tot notis conſtet radix X, quot ſunt membra in Z. in ſingulis autem membris, ut patet ex poriſ. 3 & 4 ejuſque coroll. lateat quadratus unius ſegmenti radicis; manifeſtum eſt ſegmenti radicis ultimi *a* ac proinde maximi quadratum contineri in membro ultimo, adeoque & maximo *e*, & ſic deinceps. Ex quo etiam per eadem 3, & 4. poriſ. patet de planis ſive bis factis ex &c. Conſtat ergo quæſitum.

HIS

HIS PRÆMISSIS.

EOrum omnium, quæ ad radicis quadratæ extractionem præcedenti capite, præſcripta ſunt, ratio dabitur. Reſumatur exemplum cap. præced. in quo ex numero A extracta eſt radix, Z.

1. Quia per poriſ. 6. in ultimo membro *e*, latet quadratus ſegmenti radicis ultimi, idcirco elicitur ex membro *e* radix quadrata, quam poteſt maxima, reponiturque poſt lunulam; quadratus verò illius à membro *e* ſubtrahitur, & reſiduum ſcribitur infra lineam. Et quia per 6. poriſ. in membro ultimo continetur quadratus ſolus ſegmenti ſeu partis ultimæ radicis, in reliquis verò membris præter quadratos partium radicalium continentur etiam numeri rectanguli ſeu plani, idcirco hæc operatio prima ſoli poſtremo membro convenit. Inſuper, quod ex membro *e* elicita ſit radix *a* neglecto loci valore, nimirum ac ſi eſſet tantum 56, cum revera ſit 56, 00, 00, id, quemadmodum in aliis pleriſque operationibus arithmeticis, compendii gratiâ factum eſt.

```
     e  f  g    (a b c
A  56,70,09    7 5 3   Z
   49 . . . .
 h  7,70 . . a. 700  14. 00.m
   7 2 5 . .   b. 50
 k 45, 90      c. 3
   45, 09.
```

2. Quod verò interim nota radicalis *a* ſic inventa, ſit legitima, ſic oſtendo. Cum per 5. poriſ. radix tota Z tot conſtet notis, quot totus A membris

bris, patet ante membrum *e* tot eſſe membra, quot ante *a* ſunt notæ. Quia igitur ſingula membra *f*, *g* duabus conſtant notis, tot ante *e* membrum, præcedunt notarum ſive locorum binarii, quot ante *a* præcedunt notæ ſeu loca. Quare cum nota *a* ſimpliciter accepta, per conſtr. ſit radix quadrati latentis in membro *e*, 56, ſimpliciter accepto, erit quoque per poriſma 2. *a* accepta juxta loci valorem (nempe 700) radix quadrati latentis in membro æſtimato ex loci valore, nempe in 56, 00, 00. Hoc ipſum eodem modo in reliquis membris eodem prorſus modo demonſtrabitur.

3. Ex membris penultimo, cæteriſque, quotquot fuerint notæ radicales reliquæ, eliciuntur artificio à priori planè diverſo. Ad illius rationem penitùs perſpiciendam juvabit non parùm ob oculos ponere radicis binomiæ $a + b$ quadratum, quod per poriſma 4. eſt.

$$aa + 2\ ab + bb.$$

Hujus poſtrema pars *aa* indicat in ultimo membro *e* latere quadratum ultimi radicis ſegmenti ſeu notæ *a*: reliquæ verò partes 2 $ab + bb$ indicant quid contineatur in membro penultimo *f* cum prioris *e* reſiduo, aliiſque ſingulis. Quia igitur in membro *f* cum reſiduo prioris, hoc eſt in *h* (7, 70, ſeu 770, 00) continetur 2 $ab + bb$, hoc eſt planus bis genitus ex ultimo radicis ſegmento ſeu notâ *a* jam cognitâ, in *b* adhuc incognitam, unâ cum quadrato ipſius *b*, ut patet ex lem. 6. manifeſtum eſt incognitam radicis notam *b* ex hoc membro *h* eſſe eliciendam; utique per diviſionem,

quæ

quæ ſola reſolvit, quid multiplicatio compoſuit. Cum verò latera membrum *h* producentia ſint *a* & *b*, in diviſorem illud erit aſſumendum. quod cognitum jam eſt nempe *a*, & quidem duplicatum, eo quod in membro *h* contineatur planus bis factus ex *a* in *b* hoc eſt planus ex *a* bis ſumpto, in *b*. Atque hæc cauſa eſt, cur ad conſtituendum diviſorem, radix eatenus acquiſita, duplicetur.

4. Per hunc autem diviſorem 2 *a* (14) dividitur non totum membrum *h* 7, 70, ſed demptâ notâ primâ, nimirum 77 tantùm, hâc de

	e f g		a b c	
A.	56, 70, 09		(753	Z
	49			
h	7, 7 0 . .		a. 700	
	7 2 5 . .		b. 50	
k	45, 0 9		c. 3	
	45, 0 9		a † b † c	
			700 † 50 † 3	

causâ. Ut innoteſcat nota incognita *b*, ſolus planus 2 *ab*, factus nimirum ex *a* bis in *b*, dividendus eſt, cum ad hoc nihil faciat *bb*, utpotè totus incognitus. Nihil autem plani 2 *ab* ad primum membri *h* locum pertinet, ut infrà demonſtrabitur num. 6.

5. Reperta jam porrò per diviſionem nota incognita *b* multiplicat & duplum notæ prioris *a*, ipſum nempe diviſorem 2 *a*, (14) & ſeipſam, ut habeantur duo producta: 2 *ab* † *bb* (70 & 25) quæ in membro *h* continentur & ab eodem idcirco ſubtrahuntur. Quorſum verò fiat hæc ſubtractio, patebit ex clauſula totius demonſtrationis.

6. Cur

6. Cur autem producta ex multiplicatione ſcribantur ut in appoſitâ formulâ, ratio eſt; quod 70 hoc eſt 2 *ab*, fiat ex diviſore 2 *a* in *b*, & 25, hoc eſt *bb*, fiat ex *b* in *b*: unde cum *a* ſit nota radicis uno loco altior quam *b*, etiam producti (2 *ab*,) 70 prima nota (ut patet ex poriſ. 6. c. 3. l. 1.) uno loco altior erit quam prima nota producti 25 ex *b* in *b*, ideoque ſcribenda ſupra 2 ſecundam notam quadrati (*bb*) 25. Ex quo etiam manifeſtum ſit, id quod ſupra aſſumptum fuit, videlicet nihil plani 2 *ab* hoc eſt 70, pertinere ad locum primum membri *b*. Nam cum duo illa producta adduntur, quadrati (*bb*) 25 prima nota reponitur in primo loco ſummæ 725, plani verò (2 *ab*) 70, prima nota pertinet ad locum ſummæ ſecundum. Et quia ſumma 725 tot conſtat notis, quot membrum *b*, utpote per poriſma 6. in eo latens, adeoque ab illo ſubtrahenda, manifeſtum eſt plani (2 *ab*,) 70, primam notam pertinere ad locum membri *b* ſecundum; ac proinde, cum ſolus planus (2 *ab*) 70, dividendus ſit, membrum *b* demptâ primâ notâ dividitur.

70 . . .
 25 . .
725 . .

Porrò valorem verum productorum exprimit hæc formula altera, quem inter operandum citra veritatis præjudicium diſſimulari liquet ex demonſtratis ſuprà.

70000
 2500
72500

7. At quare hæc operatio in aliis deinceps membris ſemper eadem repetitur? Ratio patet ex 6 poriſmate. Quemadmodum enim in membro *b* compoſito ex *f*, & reſiduo prioris, latet 2 *ab* + *bb*, hoc eſt planus bis ex nota radicali *a* in radi-

radicalem, *b*, una cum quadrato ipſius *b*; ita in membro *k* compoſito ex *g* & (45) prioris *f* reſiduo, latet 2 *a* + *bc*, + *cc*, hoc eſt planus bis ex *a* + *b* radice eatenus acquiſitâ, ductâ in *c*, & quadratum ipſius *c*: & ſic deinceps in reliquis membris ſi quæ eſſent plura.

8. Poſtremò quæritur, quare, cum membrum ultimum eſt, 1, vel 2, vel 3, pro radicali notâ ſcribatur unitas. Eſto quadratus A, cujus membrum ultimum eſt *b* 3, 00,00; radix autem ſit Z, cujus membrum ultimum ſit unitas.

b
3, 96, 10 (199. Z
A 100.

Quia radix Z tot habet notas per poriſm. 5, quot A membra; habebit 1, ante ſe tot cyfras, quot ante ultimum *b*, ſunt membra. Sed quot ſunt membra ante *b*, tot ante notam 3 ſunt cyfrarum binarii, ut habeatur ejus valor 3, 00, 00. Ergo ut habeatur valor ultimæ notæ ipſius Z, quæ eſt, 1, ante eam tot ponendæ ſunt cyfræ, quot ante 3 cyfrarum binarii, ac proinde ante 3, ſunt cyfræ duplo plures, quam ante 1. Ergo quadratum ipſius unitatis ex valore loci æſtimatæ erit 1, cum tot cyfris, quot ſunt ante 3. Ergo continetur in 3, 00, 00, ab eoque auferri debet. Ex quo patet quæſitum.

9. Explicatis hunc in modum ac demonſtratis ſingulis partibus extractionis quadraticæ, demonſtratio tota ſic concluditur.

e f g (a b c
A, 56, 70, 09 (7 5 3 Z
a 7 0 0
b 5 0
c 3

Numerus datus A, æqualis eſt quadrato ex *a*; plano ex *a* bis in *b*; quadrato ex *b*; plano ex *a* + *b* bis in *c*; qua-

c, quadrato ex c, ut patet ex toto opere extractionis, cum dictæ quantitates ſubtractæ fuerint ex A, nec quidquam ſubtractione ultimâ peractâ ſuperfuerit. Atqui per poriſma 4. etiam quadratus radicis Z. iiſdem æqualis eſt. Ergo A eſt ipſe quadratus radicis Z. Quod erat demonſtrandum.

Quod ſi ultimâ ſubtractione peractâ ſuperfuiſſet quidpiam, tunc numerus datus, illo reſiduo mulctatus, fuiſſet æqualis dictis quantitatibus, ac proinde & radicis inventæ quadratus.

CAPUT III.

Radicis cubicæ extractio.

Extrahenda ſit radix cubica ex numero A.

A 102,503,232 (4
64
38,

1. Poſt ternas quaſque notas initio facto à dextris, comma aut punctum interpone: eritque numerus datus A ſectus in partes ſeu membra, ternis notis conſtantia, præter ultimum, quod conſtare poteſt notis, vel duabus, ut in C; vel etiam unicâ, ut in D. Tot verò notis conſtabit radix quæſita, quot erunt numeri dati membra, ut infra demonſtrabitur.

39,820,493. C
7,900,341. D

2. Præſidio tabellæ hic appoſitæ, quâ notarum ſimplicium cubi continentur, quære poſtremi membri radicem cubicam, aut ſi id cubus non eſt, quære radicem cubi proximè minoris.

Rad.	Qua.	Cubi.
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729

Ut, quia hic poſtremum membrum 102 cubus non eſt, quære cubum proximè minorem 64. Hujus radicem 4 ſcribe poſt lunulam, quæ erit nota ultima radicis quæſitæ: cubum verò ipſum 64 aufer à poſtremo membro, & reſiduum 38 infra lineam repone. Hæc operatio ſoli poſtremo membro convenit, ac proinde in membris ſequentibus non repetitur.

3. Reſiduo 38 adſcribe membrum penultimum 503, ut fiat membrum totale novum 38,503: pro quo diviſor ſic parabitur.

A
102,503,232 (46
64
38,503
33,336
5167,

Radicis hactenus acquiſitæ 4, quadratum 16, triplica: fit 48. Tum ipſam quoque radicem 4 hactenus acquiſitam triplica: fit 12. Producta adde, numeris collocatis, ut in hâc formulâ. Summa 492 erit diviſor.

Quære igitur quoties diviſor 492 contineatur in membro 38, 506, demptâ primâ nota, hoc eſt in 3850. Reperies contineri ſexies. Scribe ergo 6 poſt lunulam, quæ erit nota penultima radicis quæſitæ.

48
12
492

Tum nota radicalis ultimò reperta, 6, multiplicans primo radicis prioris 4, quadratum ter ſumptum

ſumptum, nempe 48, faciat 288. Deinde radicis ultimò repertæ quadratum 36, multiplicans triplum radicis prioris 4, nempe 12, faciat 432. Denique 6, ſeipſam cubicè multiplicans faciat 216.

Hæc tria producta adde, numeris collocatis, ut in hac formula. Summam 33336 aufer à membro 38,503, & reſiduum 5167 infra lineam repone.

288
432
216
33336

4. Hæc operatio toto jam numero tertio expoſita, in omnibus membris ſequentibus eodem modo atque ordine repetitur.

Itaque reſiduo 5167 adſcribe membrum proximum 232, ut habeatur membrum novum totale 5167,232. Radicis 46 hactenus acquiſitæ quadratum 2116 triplica: fit 6348. Radicem quoque ipſam 46 triplica: fit 138. Hæc duo producta in unam ſummam collige numeris, ut in hac formula, collocatis. Summa eſt novus diviſor. Quære igitur quoties hic contineatur in novo membro 5167,232, demptâ primâ notâ, nempe in 5167,23. Reperies contineri octies. Scribe ergo, 8, poſt lunulam. Erit hæc nota prima radicis quæſitæ. 8 in 6348 triplum nempe quadrati radicis prius acquiſitæ 46, facit 50784. quadratum ex 8, nimirum 64, in 138, triplum radicis prioris 46,

6348
138
63618

A

102,503,232 (468
64
38,503,
33 336
5 167,232
5 167,232
0

O 2 facit

facit 8832. 8 in 8 cubicè, eſt 512. Hæc tria producta adde, numeris ut in appoſita formula ordinatis. Summam 516723[2] aufer ex mēbro 516723[2], & nihil reſtat.

50784
8832
512
5167232

Numerus ergo A cubus eſt, ejuſque radix cubica, eſt 468. Quod ſi poſt ultimam ſubtractionem aliquid ſuperſit, numerus, qui proponitur, non erit cubus: fit autem cubus, ſi mulctetur reſiduo.

5. Quæ num. 5, 6, 7, cap. 1. Notantur pro quadratæ radicis extractione, etiam in extractione radicis cubicæ erunt obſervanda.

CAPUT IV.

Cubicæ radicis demonſtratio.

PRæmitto etiam hic poriſmata quædam, ex quibus theoria tota extractionis cubicæ fiet manifeſta.

PORISMA I.

CUbus numerus aut nullas in principio habet cyfras, aut ſi habeat, eas ternarius metitur.

Demonſtratio. Nam radix quæcumque cubum generans, vel habet in principio cyfras unam aut plures;

plures, vel non habet. Si non habet, cum ut A (ſic eam lubet vocare) multiplicetur cubicè, debet prima ejus nota in ſe duci cubicè, & cubi producti prima nota ſcribi infra lineam primo loco in producto quæſito, ſive cubo totius radicis A: ac proinde cujuſcunque cubi prima nota convenit cum prima nota alicujus cubi ſimplicis. Atqui nullius cubi ſimplicis prima nota eſt, o. Ergo, &c. Quod ſi radix in principio habeat cyfras, quemadmodum B, ex ipſo multiplicationis opere manifeſtum eſt, ut B ducatur in ſe cubicè, tantùm opus eſſe, ut cubo notarum ſignificantium præponantur cyfræ triplò plures quam ſint in principio radicis B. Ergo, &c.

	239
	A
B.	580
C.	512000

Corollarium.

Ex demonſtratis patet cujuſvis cubi primam notam convenire cum prima nota, alicujus cubi ſimplicis.

P o r i s m a 2.

Eſto cubus quicumque a, *ejuſque radix cubica* c. *Cubo autem tot præponantur cyfrarum terniones* b, *quot cyfræ radici. Dico etiam totum* c, d *eſſe radicem cubicam totius* a, b.

a	b
64	000, 000
c	d
4	00

Demonſtratio. Ut habeatur cubus ex *c, d* tantùm opus eſt *c* multiplicare cubicè, & producto *a* præponere cyfras triplo plures quam ſint *d*. Atqui cyfræ *b* ſunt triplo plures per hypotheſim. Ergo *a, b* eſt cubus ex *c, d*.

Corollaria.

1. HInc patet, ſi numerus quivis ſit diviſus in membra, tribus notis conſtantia, dempto ultimo *a*, quod paucioribus conſtare poteſt, & membri cujuſpiam puta, *a*, ſimpliciter accepti radix cubica ſit *c*: ſi ante radicem *c* ponantur tot cyfræ *a*, quot ante *a* ſunt membra *e, k* ſeu locorum terniones *b*, etiam *c, d* fore radicem cubicam ipſius *a, b*, ſeu membri *a* juxta loci valorem accepti.

a	e	k
64,	230,	789
a	b	
64, |	000, 000	
c	d	
4 |	00	

2. Ex his manifeſtum eſt in quolibet membro latere cubum, & talem quidem, qualem jam determinavimus.

3. Atque ex his jam incipit apparere, cur ad extrahendam radicem cubicam, poſt ternas quaſque notas comma interponatur, & cur non interſit, ſive membrum ultimum unicâ conſtet nota, ſive duabus.

PORISMA 3.

Cubus binomii a+b *hoc eſt lineæ ſeu numeri in duas partes ſecti, eſt* aaa+ 3 aab + 3 aab+ bbb.

Hoc eſt, cubus binomii a+b *æquatur cubo ex* a: *ſolido ter ſumpto, quod fit ex quadrato ipſius* a *ducto in* b : *ſolido ter ſumpto quod fit ex quadrato ipſius* b *ducto in* a : *cubo ex* b.

```
        a+b
        a+b
        ---------
        aa+ab+bb
           ab
        ---------
        a+b
        ---------------
        aaa+aab+abb+bbb
            aab abb
            aab abb
hoc eſt: aaa+3aab+3abb+bbb.
```

Demonſtratio. Patet ex ipſo actu multiplicationis cubicæ, cujus paradigma hic apponitur: & per ſe eſt manifeſta.

Id ipſum demonſtratur in ſchemate hic adjuncto. Cubus enim *d l*, rectæ *c d* ſectæ in duas partes *a* & *b*, complectitur cubus ſegmentorum *a* & b, cubos nimirum *c e n o f q r p* & *o s* 3 *m* 2 5 1 *u*: item tria parallelepipeda æqualia, quorum baſes ſunt quadrata *po, ro, eo* æqualia quadrato *rp* ſeu *aa*, altitudines verò *px*, *b* ſeu *rd*, *ek*, quæ omnes ſunt æquales ipſi *b* : item tria parallelepipeda æqualia, quorum baſes ſunt quadrata o1, o2, o3, æqualia quadrato 7 *y*, ſeu *bb*, altitudines verò 57, 58, 3*l*, æquales ipſi *a*.

Hæc quidem, utpotè vel mediocriter elementa geometriæ callentibus ſatis nota, non eſt neceſſe pluribus demonſtrare.

PORISMA 4.

abc			
925	a. 900	a+b+c	
Z	c. 20	900+20+5	
	b. 5		

Esto numerus Z *diremptus in partes ſuas, quotcunque illæ fuerint*, a+b+c. *Ejus cubus æquatur his quantitatibus: cubo ex* a: *ſolido ter, genito ex quadrato ipſius* a *in* b: *ſolido ter, genito ex quadrato ipſius* b *ducto in* a: *cubo ex* b, (*omnes has quantitates vocabo* M) *item ſolido ter, genito ex quadrato ipſius* a+b *ducto in* c: *ſolido ter, genito ex quadrato ipſius* c *ducto in* a+b: *cubo ex* c; *quas quantitates poſteriores vocemus* N.

Demonſtratio. Sumendo enim *a+b* per modum unius, erit per poriſm. 3. cubus ex *a+b*, +*c* æqualis cubo ex *a+b* & quantitatibus N. Atqui per idem poriſma cubus ex *a+b* æquatur quantitatibus M. Ergo cubus ex *a+b+c* æquatur quantitatibus M & quantitatibus N. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Cubum igitur numeri in ſuas partes ſecti componunt ſingularum partium cubi, & dicti ſolidi.

Po-

PORISMA 5.

Cubus eſto quivis X ejuſque radix Z. Sit autem cubus X ſectus in membra, poſt ternas notas à dextra in ſiniſtram commate interjecto. Dico radicem Z tot conſtare notis, quot membra ſunt cubi dati.

X	abc
102, 503, 232	(468 Z
	(a. 400
	b. 60
	c. 8

Demonſtratio. Quoniam per coroll. 2. poriſm. 2. in ſingulis membris latet unus cubus, tot erunt membra in X, quot cubi. Sed quia per poriſm. 4. Ejuſque coroll. in cubo X. continentur cubi ſingularum radicis partium *a*, *b*, *c*, tot etiam erunt radicis partes, ac proinde & notæ, quot in X ſunt cubi. Ergo radicis Z tot ſunt notæ quot membra cubi dati X. Quod erat demonſtrandum.

PORISMA 6.

Iiſdem poſitis, dico: in membro ultimo f latet cubus ſolus ultimi radicis ſequenti a.

	f k m	abc	
X	102,503,232	(468 Z	
	f		a † b † c
	120,000,000		400†60†8
	k	a. 400	
	38,503,000	b. 60	
	m	c. 8	
	5167,232		

In	f k m	abc		
penulti-	X 102,503,232	(468 Z		
mo mẽ-	f		a†b†c	
bro k	102,000,000		400†60†8	
una cum	k	a. 400		
(38)	38,503,000	b. 60		
reſiduo	m	c. 8		
membri	5167,232			

f, *latet ſolidus numerus ter, genitus ex quadrato ipſius* a *ducto in* b, *& ſolidus ter, genitus ex quadrato ipſius* b, *ducto in* a, *& cubus ipſius* b.

In membro m *unà cum* (5167) *reſiduo membri* k *continetur ſolidus ex quadrato ipſius* a†b (*id eſt* a *cum* b) *ter ducto in* c *& ſolidus ex quadrato ipſius* c *ter ducto in* a†b, *& cubus ipſius* c.

Demonſtr. Cum enim per poriſma 5. radix Z tot conſtet notis, adeoque & ſegmentis, quot ſunt membra in X; in ſingulis autem membris, ut patet ex poriſ. 3 & 4 ejuſque corollario, lateat cubus alicujus ſegmenti radicis, manifeſtum eſt ſegmenti radicis ultimi *a* adeoque & maximi, cubum latere in membro *f* ultimo, ac proinde maximo; & ſic deinceps. Ex quibus etiam & per 3. ac 4. poriſ. patet de ſolidis. Conſtat ergo quæſitum.

HIS

HIS PRÆMISSIS

JAm ratio dabitur, eorum omnium, quæ ſuperiori capite ad extrahendam radicem cubicam fuere præſcripta.

```
     f    k    m      abc
X  102,503,232   (468. Z
    64 ...  ...
n   38,503 ...  a. 400
    33 336 ...  b. 60
                c  8
p   5167, 232
    5167, 232
              o   a†b†c
                400†60†8
```

1. Reſumatur exemplum cap. præced. Quia per 6. poriſma in poſtremo *f* membro nihil continetur aliud quàm cubus ſegmenti radicis ultimi, idcircò ex membro *f* elicitur radix cubica quàm poteſt maxima, *a*, eaque poſt lunulam reponitur, radicis quæſitæ futura poſtremum ſegmentum ſeu nota ultima: cubus verò ejus ſubtrahitur à membro *f*, reſiduo (38) ſi quod ſit, infra lineam notato. Quia autem in reliquis membris omnibus, præter cubos, reliquorum ſegmentorum radicis continentur in ſingulis præterea ſex ſolidi, idcirco hæc operatio ſoli poſtremo membro convenit, & in ſequentibus membris non repetitur.

2. Quod verò nota radicalis *a* ſit legitima, licet extracta ſit ex membro *f* ſimpliciter accepto, hoc eſt loci valore diſſimulato; ſic oſtendo. Tota radix Z tot conſtat notis, quot X numerus datus membris per poriſm. 5. Quare cum ſingula membra *k*, *m* tres contineant notas, ante

a erunt

a erunt tot notæ, ſeu loca, quot ante *f* locorum terniones. Ergo cum per conſtruct. *a* nota ſimpliciter accepta ſit radix cubi latentis in membro *f* ſimpliciter accepto, *a* quoque ex loco æſtimata, erit per 2. poriſm. radix cubi latentis in membro *f* ex loci valore æſtimato. Hæc demonſtratio etiam valet in reliquis membris, in quibus compendii gratiâ, quemadmodum in pleriſque arithmeticis operationibus, loci valor diſſimulatur, nullo (ut jam oſtendi) præjudicio veritatis.

3. Reliquæ radicis notæ artificio inter ſe uno quidem, ſed à priori penitùs diverſo reperiuntur. Illius rationi aperiendæ plurimùm conducet cubum binomii *a* † *b* ante oculos proponere, qui per poriſm. 3. eſt.

	f k m	a b c
X	102, 503, 232	(4 6 8 Z
	64	
n	38, 503 ...	a. 400
	33 336 ...	b. 60
p	5 167, 232	
	5 167, 232	
	0	a † b † c
		400 † 60 † 8

$$aaa + 3\,aab + 3\,abb + bbb.$$

Hujus poſtrema pars *aaa* oſtendit in ultimo membro *f* latere ſolum cubum notæ ultimæ radicis: reliquæ partes oſtendunt quid contineatur in membro penultimo *n* (conſtante ex (38) reſiduo membri *f*, & ex *k*) de quo jam agitur, ac in reliquis deinceps omnibus. Quia igitur, ut patet & ex formula hac, & ex 6. poriſmate, in membro *n* continentur, ſolidus ter, genitus ex quadrato notæ radicalis jam repertæ *a*, ducto in *b* adhuc in-

incognitam; item ſolidus ter, factus ex quadrato ejuſdem *b* in *a*; item cubus ejuſdem *b*; manifeſtum eſt notam illam penultimam, ſeu ſegmentum *b*, radicis adhuc incognitum eliciendum eſſe ex membro *n* dati numeri penultimo; utique per diviſionem, quæ ſola reſolvit, quod compoſuit multiplicatio.

Quia verò latera membrum *n* producentia partim cognita ſunt, partim incognita, ad conſtitutionem diviſoris aſſumenda erunt ſola cognita, nimirum 3*aa*, & 3 *a* hoc eſt triplum quadrati notæ radicalis jam inventæ *a*, nempe 48, & triplum ejuſdem *a* nempe 12; quæ in unam ſummam collecta dant diviſorem 492.

48.
12
492

4. Per hunc autem, ut eruatur nota radicis latens *b*, dividitur non totum membrum *n* (38, 503) ſed demptâ notâ primâ, nimirum 38, 50 hac de cauſa. Quoniam diviſor 492 conſtans ex 3*aa*† 3*a*, nullo modo pertinet ad cubum *bbb*, utpote qui producatur ex ſolâ notâ incognita *b*, patet per hunc dividi oportere tantùm ſolidos (3*aab*† 3*abb*) ſupradictos. Nihil autem ex hiſce ſolidis ad notam ſeu locum membri *n* primum pertinet, ad quem ſe extendit cubus genitus ex *b*, quemadmodum ex iis apparebit, quæ mox ſubjungam, num. 7.

5. Reperta porrò per diviſionem nota radicalis *b* ducitur in triplum quadrati ex *a* & quadratum ipſius *b* ducitur in triplum ipſius *a*, ac demum *b* in ſe ducitur cubicè, ut habeantur tria producta (3*aab*†3*abb*†*bbb*) quæ in membro *n* per poriſ. 6, continentur, atque idcircò ab eodem aufe-

auferuntur. Quorſum verò fiat hæc ſubtractio, liquebit ex clauſulâ totius demonſtrationis.

3 aa	48	
3 a.	12	
	492	

6. Cur autem $3aa + 3a$ hoc eſt triplum quadrati ipſis *a*, & triplum ipſius *a* quæ diviſorem conſtituunt, ordinari debeant juxta hanc formulam: Item cur tria producta $3aab + 3abb + bbb$, hoc eſt ſolidus ex triplo quadrati notæ radicalis *a* ducto in notam radicalem *b*; unà cum ſolido ex triplo *a* in quadratum ipſius *b*; una cum cubo ipſius *b* ſcribantur juxta formulam hanc alteram,

288.	3 aab
432.	3 abb
216	bbb
33336	

reſtat nunc breviter ut demonſtremus. Et quidem quod attinet ad partes diviſoris $3aa + 3a$, manifeſtum eſt quadratum ipſius *a* uno loco ſeu gradu attolli altius quam *a*, ideoque 8 prima nota ipſius $3aa$. 48, ponenda ſupra, 1. ſecundam notam tripli ipſius *a*, id eſt 12. Quod attinet ad tria producta: quia $3abb$ fit ex $3a$ in *bb*, & cubus *bbb* fit ex *b* in *bb*, eſtque *a* nota radicis uno loco altior quam *b* manifeſtum ex poriſm. 6. c. 2. l. 1. Solidi $3abb$ hoc eſt 432, primã notam 2, etiam uno loco altiorem eſſe primâ notâ cubi *bbb*, 216, ideoque ſcribendam ſupra, 1, notã ſecundam cubi *bbb*, 216. Rurſum quia ſolidus $3aab$, fit ex $3a$ in *ab*, ſolidus autem $3abb$ fit ex $3a$ in *bb* (gignitur enim tam $3aab$, quàm $3abb$ ex lateribus quocunque inter ſe ordine multiplicatis, ut demonſtravi in ſcholio prop. 18. l. 8.) eſtque *a* nota radicis uno loco altior quam *b*, manifeſtum eſt ſolidi $3aab$, hoc eſt 288, primam notam 8, uno

quoque

uoque loco altiorem eſſe primâ-notâ ſolidâ *abb*, hoc eſt 432, ideoque ſcribendam ſupra ſodi 432 notam ſecundam 3. Atque hæc dictæ ollocationis eſt ratio adæquata.

```
  f    k    m       a b c
  102, 503, 232    (4 6 8  Z
   64, 5 . .  . . .
 n 38, 503 . . .  a. 400
   33 33 6 . . .  b. 60
                  c. 8
 p 5167, 232
   5167, 232       a + b + c
            0    900+60+8
```

7. Ex qua etiam cernitur quod ſupra n. 4. aſſumptum fuit, nihil ex ſolidis 3*aab* & 3*abb* pertinere ad notam primam membri *n*. Nam ſi ria illa producta ſic collocata addantur, patet cui 216 primam notam 6 reponi in primo loco ommæ 33336, ſolidos vero 3*abb*, & 3*aab*, hoc ſt 432, & 288 totaliter pertinere ad loca ſummæ equentia. Et quia trium productorum ſumma 3336 æquè multis conſtat notis, ac membrum , utpotè per poriſma 6 in eo latens, adeoque b illo ſubtrahenda; manifeſtum eſt, nihil quoue ex ſolidis 3*aab* & 3*abb* contineri in primo nembri loco, ac proinde cum dicti ſolidi ſoli int dividendi, ut oſtendi num. 3. dividitur memrum *n* demptâ notâ primâ.

Porro trium productorum valorem verum exprimit hæc formula, quem in operando diſſimulatum eſſe ſine veritatis præjudicio iquet ex ſupra demonſtratis n. 2.

```
28800,000
 4320,000
  216,000
---------
33336,000
```

8. Reliquum eſt ut dicamus, cur ex membris cæteris eodem prorſus modo eliciantur radicales notæ

notæ reliquæ, quo ex penultimo. Cauſa eſt manifeſta ex poriſ. 6. Quemadmodum enim in membro penultimo *n*, compoſito ex (38) reſiduo membri *f*, & ex *k*, continebantur $3aab+3abb+bbb$ hoc eſt ſolidus ex quadrato radicalis notæ *a* ducto ter in radicalem *b*, & ſolidus ex radicali *a* ter ductâ in quadratum radicalis *b*, & cubus ipſius *b*, ita in membro *p*, quod componitur ex (5167) reſiduo membri *n*, & ex *m*, continentur ſolidus ex quadrato radicis eouſque acquiſitæ $a+b$ (hoc eſt *a* cum *b*) ter ducto in radicalem *c*, unà cum ſolido ex $a+b$ ter ducto in quadratum ipſius *c*, unà cum cubo ipſius *c*, quæ quantitates ſi $a+b$ brevitatis cauſa interpretemur per *d*, exprimuntur hâc formulâ, $3ddc+3dcc+ccc$, quæ formula per omnia ſimilis eſt priori $3aab+3abb+bbb$.

9. Poſtremò quæritur, quare cum membrum ultimum eſt 1, vel 2, vel 3, pro radicali nota ſcribenda ſit unitas.

Eſto cubus G, ejuſque radix L. Quoniam per poriſ. 5. 1 in radice L, tot ante ſe habet notas ſeu loca, quot ante 3 ultimum membrum cubi dati antecedunt membra, manifeſtum eſt hujus valorem eſſe 3,000,000, illius verò 100, ſic ut 1 ante ſe tot habeat cyfras, quot 3 cyfrarum terniones. Atqui cubus numeri 100, nempe 1000,000, tot etiam ante 1, habet cyfrarum terniones, quot in radice 100. ſunt cyfræ ut patet ex actu ipſo multiplicationis. Ergo etiam cubus radicis 100 tot habet cyfras, quot membrum 3,000,000. Ergo cubus ipſius 100, nempe 1,000,000

G 3, 307 : 949

(149 L

000 latet in membro 3,000,000, ac proinde 1, eſt vera radicalis nota, quæ ex ultimo membro 3, erat elicienda.

10. Explicatis hunc in modum ac demonſtratis omnibus, quæ ad extrahendam è numero dato radicem cubicam fuere præcepta, demonſtratio tota ſic concluditur.

Numerus datus X ut patet ex toto opere extractionis, æqualis eſt cubo ex *a*, ſolido ter ex quadrato ipſius *a* in *b*, ſolido ter ex *a* in quadr. ex *b*, cubo ex *b*. Item ſolido ter ex quadrato ipſius *a* + *b* in *c*, ſolido ter ex *a* + *b* in quad. ipſius *c*, cubo ex *c*. Quæ quantitates *a* + *b* interpretando per *d*, ſpecioſè ſic exprimuntur.

abc	
102,503,232. (468 Z	
X	
	a. 400
	b. 60
	c. 8

$$aaa + 3aab + 3abb + bbb$$
$$+ ddd + 3ddc + 3dcc + ccc$$

Atqui iiſdem quantitatibus per poriſ. 4. æquatur cubus radicis Z, ſeu *a* + *b* + *c*, Ergo X eſt ipſe cubus radicis Z, ſive *a* + *b* + *c*. quod erat demonſtrandum.

Eſt autem numerus datus X æqualis quantitatibus ſupradictis, quia illæ omnes ab eo fuere ſubtractæ, nec quidquam ultimâ ſubtractione peractâ ſuperfuit. Quod ſi aliquid ſuperfuiſſet, tunc numerus datus illo reſiduo mulctatus fuiſſet æqualis quantitatibus dictis; ac proinde & cubus radicis inventæ.

CAPUT V.

Cujuſcunque radicis extractio.

QUadratam & cubicam cæteræ omnis generis radices quadam proportione imitantur. Quemadmodum enim, ut ex cap. 2. & 4 patuit, harum extractio ex generatione quadrati ac cubi à radice binomia, derivata eſt; ita & reliquarum quæque ex geneſi poteſtatis ſuæ derivabitur. Itaque generale artificium radicis è poteſtate data eliciendæ exhibent formulæ poteſtatum à radice binomiâ genitarum.

	0.	Unitas
Radix.	1.	$a+b$
Quad.	2.	$aa+2ab+bb$
Cubus.	3.	$aaa+3aab+3abb+bbb$.
Quadquad.	4.	$aaaa+4aaab+6aabb+4abbb+bbbb$
Superſol.	5.	$aaaaa+5aaaab+10,aaabb+10,aabbb+5abbbb+bbbbb$.
Quad. cub.	6.	$aaaaaa+6aaaaab+15aaaabb+20,aaabbb+15\,aabbbb+6abbbbb+bbbbbb$
Superſol. 2.	7.	$a^7+7a^6b+21,a^5b^2+35,a^4b^3+35a^3b^4+21,a^2b^5+7ab^6+b^7$.

Ra

Radix $a+b$ in ſe ducta gignit quadratum: hoc radicem facit cubum: cubus in radicem fa- quadratoquadratum. Et ſic deinceps pote- te quâvis in radicem ductâ gignitur proxi- è altior. Poteſtates porrò, ut liquet ex propo- ione 8. l. 9. ejuſque ſcholio, ſunt termini pro- ſſionis Geometricæ ab unitate incipientis, in a quorum unaquæque poteſtas locum occu- , & quot habeat unaquæque dimenſio- s, indicant numeri ſingulis appoſiti, qui de cauſa exponentes appellantur. In po- ema formula brevitatis cauſa *a* 7 ſignificat *aaaaa*: &c.

Reliquum eſt, ut quâ ratione per formulas n dictas cujuſvis generis radicum extractiones igantur, exponamus.

Numerus datus, ex quo radix extrahenda eſt, lextra in ſiniſtram dividatur in membra tot is conſtantia, quot indicantur ab exponente eſtatis radicem extrahendam denominantis, ter membrum ultimum, quod conſtare poteſt cioribus. Quoniam igitur quadratus duas, us tres habet dimenſiones, in hoc poſt ternas, illo poſt binas quaſque notas comma inter- itur. Quod ſi numerus datus minor ſit, quàm ic in membra dividi poſſit, quid tum facto pus, & quî radix data ex eo elicienda, dice- cap. 7.

Tum formula poteſtatis radicem quæſitam ominantis inſpicienda. Hujus poſtremum nen ſive particula continet operationem po- mo membro debitam: per reliquas omnes mẽ- penultimi ac cæterorum extractio dirigitur. oniam igitur in poſtrema particula contine-

tur ſola radicis quæſitæ poteſtas pura, eliciend
erit ex membro ultimo numeri dati, radix eju
generis, cujus petitur, quàm poterit maxim
præſidio tabellæ continentis poteſtates ſimpli
cium numerorum 2, 3, 4 &c. quam eum in finen
oportebit conficere. Reliquis deinde, ut cap
& 3, num. 2, præſcribitur expletis, abſoluta e
operatió poſtremi membri.

In operatione membri penultimi, quæ & om
nibus reliquis membris communis eſt, duæ ſun
partes, præcipuæ; prima inventio diviſoris, pe
quem nova radicalis nota debet innoteſcere; ſe
cunda, quo modo nova nota radicalis, divi
ſoris operâ inventa, multiplicari debeat, ut ha
beantur producta, quæ à membro auferantur
Utrumque formulæ poteſtatum, pulcherrim
exhibent litterarum *a* & *b* variâ conjunctione
Et *a* quidem ſignificat quidquid ex radice eate
nus acquiſitum eſt ac cognitum; *b* verò notam
radicis deſignat adhuc incognitam & proxim
inveniendam. Inventionem diviſoris indican
particulæ mediæ per litteras *a*, hoc eſt per i
quod in iis cognitum jam eſt: medias autem
particulas voco omnes, demptâ primâ & ultimâ
Multiplicationis modum præſcribunt particulæ
omnes demptâ ultimâ, quam ſupra jam dixi ſol
primo membro inſervire.

Itaque quoniam in particula media formula
quadrati, habetur $2a$, radix eatenus inventa,
duplicata dabit diviſorem. Rurſum quoniam in
eadem formula demptâ ultimâ particulâ, haben-
tur $2ab+bb$ oportebit diviſorem, hoc eſt $2a$; duce-
re in *b* notam radicalem proximè inventam, &
ipſam *b* in ſe ipſam.

Pari

Pari modo quia in particulis mediis formulæ ubi habentur $3aa+3a$; quadratum radicis ea- enus inventæ triplicatum, & ipſa radix tripli- ata dabunt diviſorem, ſed ea ratione diſpoſitæ t præſcribitur num. 3. cap. 3. Rurſum quo- iam in formula cubi, demptâ particulâ ultimâ abentur $3aab+3abb+bbb$. Oportebit propter *aab*, triplum quadrati radicis eatenus inventæ ucere in notam jam proximè inventam *b*; & ropter $3abb$, triplum ipſius radicis in quadra- um ipſius *b*; & propter *bbb*, ducenda erit *b* cu- icè in ſeipſam.

Sed placet hujus methodi generalis exemplum re in radice ſuperſolidâ primâ, cujus nimi- um poteſtas eſt dimenſionum, 5. Oporteat igi- ur radicem ſuperſolidam primam extrahere ex umero X.

	d	c	ab
X	4591,	65024	(54
	3125		B
f	1466,	65024	
	1466	65024	
		0	

1. Quoniam hujus radicis poteſtas eſt 5 dimenſionum, poſt quinque notas ponatur comma, eritque numerus X ſectus in duo membra *d* & *c*, ac totidem otis conſtabit radix.

2. Inſpiciatur formula ſuperſolidi. Quoniam ltima ejus particula eſt *aaaaa*. oportet ex ul- imo membro *d* elicere radicem ſuperſolidam. ræſidio igitur tabellæ, ad eum finem con-

$\overset{6}{aaaaa} + \overset{5}{5aaaab} + \overset{4}{10aaabb} + \overset{3}{10aabbb} + \overset{2}{5abbbb} + \overset{1}{bbbbb}$.

Formula ſuperſolidi. ſtruendæ ſimplicium. Superſolidi contineantur, quæratur ſuperſolidus ipſi membro *d* par aut proximè minor. Is eſt 3125, ejuſque radix 5, quam ſcribe poſt lunulam; poteſtatem verò 3125 aufer à membro *d*, reſiduo 1466 infra lineam notato. Hæc operatio ſoli poſtremo membro convenit.

3. Reſiduo 1466 adſcribe membrum *c*, ut ex utroque fiat membrum novum totale *f*. Jam dictum ſupra medias particulas (quæ hic ſunt, ſecunda, tertia, quarta, quinta) dirigere per litteras *a* diviſoris inventionem. Quoniam igitur in quinta reperis 5*aaaa*; radicis hactenus inventæ, quam deſignat *a*, biquadratus erit quintuplicandus, ut fiat *g*. Et quia in quarta habetur 10*aaa*, oportebit cubum ipſius *a* decuplare, ut fiat *h*. Rurſus quia in tertia particula reperio 10*aa*, decuplandus erit quadratus ipſius *a*, ut fiat *k*. Tandem quia in ſecunda habetur 5*a*, quintuplicanda erit *a*, ut fiat *m*.

3125.	g
1250.	h
250.	k
25.	m
3252525.	n

Hi quatuor numeri notis, ut hic adjecta declarat formula, diſpoſitis, in unam ſummam collecti dabunt *n* diviſorem, per quem tentanda eſt diviſio membri *f*, ut innoteſcat proxima radicis nota (4) incognita, deſignata, per *b*.

4. Reliquum eſt ut multiplicatio ad extractionem requiſita inſtituatur. Eam verò dirige à tota formula demptâ particulâ ultimâ, quæ hic ſexta, jam dictum ſupra. Quoniam igitur par-

particula quinta eſt *5aaaab*, *g* quintuplum biquadrati radicis prius acquiſitæ *a* (5) ducendum eſt in *b* (4) notam radicalem paulò ante incognitam, & jam proximè inventam, ut fiat *p*. Deinde quia particula quarta eſt 10*aaabb*, oportebit (*b*) decuplum cubi ex *a* (5) ducere in quadratum ex *b* (4) ut fiat *q*. Rurſum quia particula tertia eſt 10, *aabbb*, decuplum quadrati ex *a* (5) nempe *k*, ducendum erit in cubum ex *b* (4) ut fiat *r*. Jam quia particula ſecunda eſt 5*a bbbb*, quintuplum ipſius *a* (5) ducendum erit in biquadratum ex *b* (4) ut fiat *s*. Denique quia prima particula eſt *bbbbb*, oportebit *b* (4) ad ſurdeſolidum multiplicando evehere, ut fiat *t*.

12500.	p
20000.	q
16000.	r
6400.	s
1024.	t
146665024.	z

Hæc 5 producta numeris, ut in adjecta formula, collocatis, in unam colligantur ſummam *z*, quæ à membro *f* ſubducatur.

Eodem prorſus modo, ſi plura eſſent membra, ex illis eâdem formulâ dirigente, notæ radicales reliquæ elicerentur, litterâ *a* ſemper deſignante totam radicem eatenus acquiſitam (quæ hic jam eſſet 54) *b* verò ſignante notam radicis incognitam, proximè inveniendam. Atque ita educta eſt radix ſurdeſolida prima B ex numero dato X, qui, quod poſt ultimam ſubtractionem nihil ſuperfuerit, verè eſt ſuperſolidus, ſive ſurdeſolidus primus.

Aliæ radices quæcumque per formulas unicuique poteſtati proprias ſimili planè artificio extrahentur.

Demonſtratio. Porrò horum omnium facilis eſt

ex iis quæ cap. 2. & 4 in radicis quadratæ ac cubicæ demonſtrationis dicta ſunt.

Cæterùm quamvis methodus jam tradita ad omnes omnino poteſtates ſe extendat, convenit tamen potiſſimum ſuperſolidis. In reliquis eſt alia quædam via facilior. Cum enim in qualibet ſerie numerorum continuè proportionalium, omnes termini (hoc eſt omnes poteſtates) ſint vel ſuperſolidi vel quadrati, vel cubi, vel cubi ſimul & quadrati, ut demonſtravi in ſch. prop. 8. l. 9, manifeſtum eſt ex qualibet poteſtate non ſuperſolida radicem ipſi propriam elici poſſe extractione radicis quadratæ aut cubicæ, aut utriuſque ſæpius repetitâ. Quod ita fiet.

Ex ſcholio noſtro poſt p. 8. l. 9. cognoſce, an poteſtas radicis extrahendæ ſit quadratus ſimul & cubus, an quadratus vel cubus tantùm. Si eſt quadratus ſimul & cubus, toties extrahe radicem quadratam, quoties poteſtatis exponens ejuſque dimidium, & dimidii dimidium, & ſic deinceps, poteſt biſecari, & toties cubicam, quoties reſiduum, & reſidui pars tertia, & ſic deinceps, poterit triſecari. Detur extrahenda ex
A numero R 18) id eſt radix po- A. (B
teſtatis, cujus exponens 18. Quo- (C
niam 18 poteſt biſecari, extrahe (D
ex A radicem quadratam B. Et
quia reſiduum 9 non poteſt biſecari, ſed triſecari, ex radice B, extrahe radicem cubicam C. Rurſum quia reſidui tertia pars, 3, poteſt triſecari, ex radice C extrahe rurſus radicem cubicam D. Erit D, R 18) ex dato numero A extracta. Oporteat deinde ex numero A extrahere R 6) hoc eſt radicem cujus poteſtas exponentem habet

bet

bet *6*. Quoniam *6* poteſt biſecari, ex A elice radicem quadratam F: & quia reſiduum 3, non poteſt biſecari, ſed triſecari, ex F, elice radicem cubicam G. Erit hæc R *6*) ex dato numero extracta.

A (F G

Si poteſtas radicis extrahendæ eſt cubus tantum, toties extrahenda eſt radix cubica, quoties exponens, & ejus tertia pars & tertia tertiæ, & ſic deinceps, poteſt triſecari: ut ſi ex numero A extrahenda ſit R 27.) quia 27 poteſt triſecari, ex A extrahe R 3) H: & quia ipſius 27 tertia pars 9 poteſt triſecari, ex H extrahe R 3) I; & quia ipſius 9 tertia pars 3 poteſt triſecari, ex I elice R 3) K. Erit K R 27) ex dato numero A extracta.

A (H I (K

Si poteſtas radicis quæſitæ ſit quadratus tantùm, toties extrahæ radicem quadratam, quoties poteſtatis exponens ejuſque dimidium & dimidii dimidium, & ſic deinceps, poteſt biſecari: ut ſi oporteat ex dato numero A extrahere R 8,) quia exponens 8 poteſt biſecari, ex A extrahe R 2) M: & quia dimidium 4 poteſt biſecari, ex M extrahe R 2) N; rurſum quia dimidium 2 poteſt biſecari, ex N elice R 2) O. Erit O, R 8) quæ ex numero dato quærebatur.

A M N O

Horum omnium demonſtratio patet ex ſcholio p. 8. l. 9.

CAPUT VI.

Extractio quarumlibet radicum è quibuſcunque fractis.

FRactorum alii communes ſunt; alii, quos decimales libro ſecundo cap. 9. & ſeq. appellavimus. Radices ex utriſque hoc capite eliciemus.

Ex Fractis communibus Radix quæcunque.

OPus totum unicâ præceptione continetur. Ex numeratore & denominatore fractionis datæ, radices extrahantur, quales expetuntur. Fractio ex his compoſita erit radix quæſita fractionis datæ.

$$\overset{a}{\frac{9604}{39601}}_{b} \quad \left(\overset{c}{\frac{98}{199}}_{d} \right.$$

Ut ſi ex fractione data *a*, *b* petatur radix quadrata, vel alia quævis; ex numeratore *a* eliciatur radix *c* ſpeciei datæ; item ex nominatore, quæ ſit *d*. Fractio *c*, *d*, erit radix quæſita fractionis datæ *a*, *b*.

Demonſtratio eſt manifeſta, quia ex vi conſtructionis fractio *c d* juxta exigentiam radicis datæ multiplicata producet fractum *a*, *b*.

Ex

Ex fractis decimalibus radix quadrata.

SI decimalis dati maximum ſignum eſt par ut ſit in A, extrahe ex A tanquam purè integro, radicem, cujus primam notam affice ſigni maximi dimidio. Erit hæc (nempe B) radix quæſita.

I II I
A 240 1 (49 B

c 2401, 49 d
k 100. 10. f

Si ſignum maximum eſt impar ut in C, adjectâ cyfrâ fiat par, ut in D. Tum ex D eliciatur radix E, ut ſuprà. Erit hæc radix quadrata dati C.

I II III
C 2 0 2 5

I II III IV I II
D 2 0 2 5 0 (1 4 2 E

III IV
8 6

Ad demonſtrationem eſto lemma: ſi à numero G, qui conſtat unitate & cyfris paribus, auferatur ſemiſſis cyfrarum, ut in K; erit K radix quadrata numeri G. Nam, ut patet ex multiplicationis compendio l. 1. cap. 7. habetur quadratus ex K, ſi cyfræ ejus duplentur. Sed ex vi conſtructionis, tunc K fit G. Ergo G eſt quadratus ex K. Hoc poſito,

G 10000
K 100

Demonſt. Pars 1. Fractus, *c k*, cujus numerator *c* iiſdem conſtat notis, quibus A, nominator verò *k* tot cyfris, quot indicantur à ſigno maximo ipſius A, æquatur ipſi A per theorema 2. cap. 10. l. 2. Atqui ut ex fracto *c k* extrahatur radix quadrata, tantùm opus eſt ex numera-

meratore *c*, hoc eſt ex dato A, tanquam integro, elicere radicem quadrat. *d*, & ex nominatore *k* radicem *f*; elicitur verò ex *k* radix quadrata (ut patet ex lem.) ſi dimidietur cyfrarum numerus; hoc eſt ſi dentur ipſi *f* tot cyfræ, quot indicantur à ſemiſſe maximi ſigni ipſius A. Ergo etiam ut ex A extrahatur radix, ſolum opus eſt ex A tanquam integro elicere radicem *d*, eique ſubſcribere nominatorem *f*, qui conſtet unitate & tot cyfris quot indicat ſemiſſis maximi ſigni ipſius A, ut habeatur fractus *d*, *f*. Atqui fractus *d*, *f*. per theor. 2. c. 10. l. 2. eſt æqualis B, cum *d* ex vi conſtructionis iiſdem conſtet notis, quibus B, & *f* tot habeat cyfras, quot indicantur à ſemiſſe maximi ſigni ipſius A; hoc eſt per conſtruct. quot indicantur à ſigno maximo ipſius B. Ergo etiam B eſt radix quadrata dati A. Quod erat demonſtrandum.

Demonſtr. 2. *Pars.* Per axioma cap. 10. l. 2. D eſt æqualis C. Atqui per 1. partem E eſt radix quadrata ex D. Ergo E etiam eſt radix quadrata ex C. Quod erat demonſtrandum.

Ex fractis decimalibus radix cubica.

	I II III			I
A	973 3 6			(46 B.
	$\frac{97336}{1000}$ a b			($\frac{46}{10}$ c d

SI maximum ſignum decimalis dati triſecari poſſit, ut in A contingit, ex A tanquam purè integro, radicem extrahe cubicam, cujus primam notam affice ſigni maximi triente. Erit hæc (nempe B) radix cubica ex A.

Si

Si maximum ſignum triſecari nequeat, (ut accidit in C) adjice unam vel duas cyfras, ut poſſit (quemadmodum vides in D.) Tum ex D elice radicem cubicam F ut ſupra.

	I II III IV
C	97 3 3 6
	I II III IV V VI I II
D	97 3 3 6 0 0 (21 3 F
	II III IV V VI
	7 0 0 0 3

Ad demonſtrationem eſto lemma: ſi detur numerus G conſtans unitate & cyfris, quas metitur ternarius; (K) unitas cum cyfrarum triente; erit radix cubica ipſius D.

1000000 G
100
K

Nam, ut patet ex multiplicationis compendio, habetur cubus ex K, ſi ipſius cyfræ triplentur. Sed tunc ex vi conſtr. fit G. Ergo G eſt cubus ex K.

Hoc poſito, demonſtratio planè ſimilis erit præcedenti.

Ex fractis decimalibus radix quæcunque.

EX numero dato tanquam purè integro extrahe radicem datam. Tum maximum ſignum dati numeri divide per exponentem radicis datæ. Quotiens dabit ſignum quo afficienda eſt nota prima radicis inventæ. Si maximum ſignum per exponentem radicis datæ dividi non poſſit, adjice tot cyfras decimales ut poſſit, & operare ut ſupra.

Exemp.

Exemp. Oporteat ex numero F extrahere R5) hoc eſt ſuperſolidam primam.

	I II III IV V I
	F 4 5 9 1 6 5 0 2 4 (5 4 H
	I II III IV V VI VII VIII IX X I II
	F 1 0 9 9 5 1 1 6 2 7 7 7 6 (2 5 6 H

Ex F tanquam integro elice R5). Tum per 5 exponentem radicis datæ, divide maximum ſignum dati F, quod in primo exemplo eſt v ſeu 5, in ſecundo eſt X ſeu 10. Quotiens, qui eſt 1, in primo; 2 in ſecundo, dat ſignum quo afficienda eſt prima nota radicis inventæ; eritque H radix ſuperſolida dati F.

Demonſtratio eadem prorſus, quæ ſupra, præmiſſo hoc lemmate. Datus ſit numerus C, conſtans unitate & cyfris, quas numerus D metiatur per numerum E. Erit numerus F conſtans unitate & cyfris à quotiente E indicatis, radix dati numeri C à diviſore D denominata.

C 100000, 00000

R5)   R2)
D   E

100
F

Nam cum D metiatur cyfras dati C per E; ergo D in E ductus, producet cyfras dati C. Ergo per 16. l. 7. Etiam E in D producet C. Atqui per conſtruct. E eſt numerus cyfrarum ipſius F. Ergo cyfræ F ductæ in D producunt cyfras dati C. Ergo C eſt poteſtas, cujus exponens eſt D, & radix F.

CAPUT VII.

Approximatio radicum.

SI in extractione radicis quadratæ, cubicæ, vel alterius cujuſcunque, poſt ſubtractionem ultimam aliquid ſuperſit, certum erit ex iis, quæ 2 & 4 cap. ſunt demonſtrata, numerum, cujus radix quærebatur, non eſſe quadratum, aut cubum, aut aliam poteſtatem, ac proinde non habere radicem quadratam, aut cubicam, ſeu aliam pro quæſiti ratione. Poterunt nihilominus radices exhiberi, quæ ad veram impoſſibilem (quæ ſurda ſeu irrationalis ab Arithmeticis appellari ſolet) accedant propiùs ſemper ac propiùs in infinitum; hoc eſt quæ ab impoſſibili verâ differant quantitate minori quacunque datâ; ac proinde quæ per ſeipſas multiplicatæ, quadraticè, vel cubicè, vel aliter pro gradu dato, producant quadratos, vel cubos, vel &c. differentes à dato numero, quantitate quâcumque datâ minori. Artificium eſt ejuſmodi.

1. Nu-	a	b	c	d	m
mero dato		I II III IV		I II	
a, ex quo	2057 |	00,0 0	(50 |	0 6	2500
aliquid ſu-					
perfuit ad-	7	I II III IV			I II III IV
jiciātur ali-	k	9 9 6 4		25060	0 3 6
quot cyfra-		f		n	
rum deci-					

malium binarii, ſi radix quadrata petitur; ali-

quot

quot terniones, ſi cubica; aliquot quaterniones, ſi biquadrata; quinades, ſi ſuperſolida, & ſic deinceps juxta exponentem uniuſcujuſque poteſtatis. Ex numero ſic aucto *a*, *b*, radicem talem elice, qualis petitur, ut capite præcedente traditum eſt; hoc eſt extractionem radicis inchoatam proſequere. Novæ radicales notæ *d*, prioribus *c* adjunctæ, radicem dabunt, propinquiorem veræ impoſſibili.

In exemplo extractionis quadraticæ hic oppoſito, quadratum prioris radicis *c* eſt *m*, quod à numero dato *a* deficit, numero *k*. Quadratum vero radicis *c d* eſt *n*, quod deficit ab dato *a* per *f*. Eſt verò *f* minus quàm *k*. Porrò notæ reſidui *f* ſunt ſemper homogeneæ totidem primis notis numeri *a*. *b*.

I II	III IV V VI	I	II III	I II m
2507 |	0 0,0 0	(5 0 |	0 6	2500 0
a	b	c	d	
II	III IV V VI			I II III IV V VI
k. 7	9 9 6 4			2506 0 0 3 6
	f			n

Quod ſi pluribus ſemper ac pluribus cyfrarum, binariis, ternariis &c. adjectis continuetur extractio, appropinquabitur ad radicem veram propiùs in infinitum, ſic ut differentia fiat quâcumque datâ minor: nunquam tamen ad æqualitatem pervenietur.

2. Ex his patet quid præſtandum ſit in fractis vulgaribus; adjiciendæ videlicet cyfræ (ut ſupra) tam numeratori, quàm nominatori, ſi in utroque aliquid ſuperfuit; aut alterutri tantùm, ſi aliquid ſuperfuit, tantum in alterutro.

3. Eo-

3. Eodem artificio ex numero quantumvis parvo; extrahetur radix, quantumvis alta. Exemp. gr. ex binario, R 9), hoc eſt radix cubo cubica. Adjungentur enim binario aliquot cyfrarum nonades, quia exponens radicis quæſitæ eſt 9. & ex binario ſic aucto extrahetur radix quæſita ut capite præcedente traditur.

Quoniam verò mirum videri ſolet methodo extractionis jam explicatâ per fractos numeros ad radicem veram appropinquari in infinitum, neque tamen ad eam poſſe unquam perveniri, ac proinde impoſſibilem eſſe: videtur hic locus exigere ut ejus rei demonſtrationem producamus. Eſto igitur.

THEOREMA.

NUmerus non quadratus, aut non cubus, ſit a, *hoc eſt cujus integer numerus nullus ſit radix quadrata vel cubica. Demonſtrandum eſt ejus radicem etiam ne fractionibus quidem ullis poſſe exhiberi; hoc eſt nullum poſſe dari aut fractum numerum, aut mixtum ex integro & fracto, qui in ſe ductus quadraticè vel cubicè producat datum numerum* a.

1.	x	a. 6
1.	x	t. a. 6

$$B\ \frac{m}{n} \qquad \frac{y}{z}\ D$$

Demonſtr. Detur enim, ſi fieri poteſt, fractus B, qui ſit radix numeri *a* (ſi fingeretur radix eſſe integer cum fracto, integro ad fractum reducto, prior caſus non mutabitur): hic fractus, B in ſe ductus quadraticè aut cubicè, alium gignet fractum D, videlicet ſi

tam numerator *m*, quàm nominator *n* in ſe ducantur quadraticè, aut cubicè. Quoniam igitur tam *a* per hyp. quam D per conſt. ſunt quadratus vel cubus fracti B, erunt *a* & D æquales. Quare cum per Theo. 1. cap. 2. l. 2, unitas (1) ſit ad fractum D ut nominator *z* eſt ad numeratorem *y*, etiam, 1, erit ad *a* ut *z* ad *y*. Jam verò quia numeri *z* & *y* quadrati ſunt vel cubi, quia geniti ſunt ex numeris *n* & *m* in ſe ipſos ductis quadraticè vel cubicè, inter eos cadent vel unus medius proportionalis per 11. l. 8. ſi quadrati ſint, vel duo medii per 12. l. 8, ſi ſunt cubi. Quare ut jam oſtendi, cum 1, ſit ad *a* ut *z* ad *y*, etiam inter, 1, & *a*, cadet unus medius *x*, vel duo *x*, *t* per 8. l. 8. Ergo per 8. l. 9. *a* quadratus eſt vel cubus, ejuſque radix quadrata vel cubica, eſt numerus integer *x*. Quod eſt abſurdum, cum hypotheſim deſtruat. Non igitur &c.

1.	x.	a. 6
1.	x.	t. a. 6

B $\frac{m}{n}$ $\frac{y}{z}$ D

Eodem modo Theorema non de quadrato ſolum & cubo, ſed etiam de poteſtate quacunque demonſtrabitur.

Quamvis autem numerorum non quadratorum, & non cuborum &c. Radices impoſſibile ſit numeris explicare: Poſſunt nihilominus exhiberi geometricè hunc in modum.

Datus ſit numerus non quadratus 12, cujus duo latera (hoc eſt quæ per invicem multiplicata ipſum producunt) ſunt 3 & 4. Exhibeantur deindè duæ rectæ lineæ una 3 partium æqualium, quarum altera ſit 4; interque eas per 12. l. 6. recta inveniatur media proportionalis. Hæc erit

radix

dix quadrata 12. Ejus enim quadratum per *7. l.6.* æquale eſt extremarum 3, & 4, rectangu-, quod eſt 12 ex hyp. Quare numeri ſurdi ſeu ationales meritò geometrici numeri appellari ſſunt.

Scholium.

Ametſi radices ſurdæ nullis numeris, ut jam oſtendimus, exprimi poſſint: ex his tamen, quod nùs exercitatis incredibile videri queat, quædam in- ſe commenſurabiles ſunt; ac proinde licet ipſæ ne-ant exprimi numeris, poteſt tamen earum proportio. m omnem triplici theoremate complexus exponam.

THEOREMA I.

R*Adices ſurdæ numeris abſolutis incommenſurabiles ſunt.*

Demonſtr. *Data ſit* R.8(*hoc eſt ix quadrata numeri* 8) *&* 5. *ſi* 5 R. 8. *commenſurabiles ſunt, ergo t inter ſe ut aliquis numerus* a *ad uem numerum* b. *Ergo etiam adratum ex* 5, *nempe* 25, *eſt ad quadratum* R. 8, *pè ad* 8, *ut* aa, *quadratus numeri* a, *eſt ad* bb *dratum numeri* b. *Igitur quia primus* 25 *quatus eſt, etiam ſecundus* 8 *per* 24. *l.* 8. *quadratus quod repugnat hypotheſi.*

5.	R. 8
a	b
aa	bb
25	8

Eodem diſcurſu, ſed per 25. *l.* 8. *id ipſum de ſurda ice cubica demonſtrabitur. Atque inde id non obè concludetur de qualibet.*

Corollar. 1. *Hinc patet diametrum in quadrat[o] lateri incommenſurabilem eſſe, cum enim per* 47. *l.* 1. *quadratum diametri duplum ſit quadrati ex latere, erit diameter* R. 2, *hoc eſt radix quadrata binarii, latus verò, hoc eſt* 1; R. 2, *verò &* 1, *incommenſurabiles ſunt.*

2. *Hinc aliâ viâ colligitur veritas theorematis ſuperiùs demonſtrati. Cùm enim radices ſurdæ incommenſurabiles ſint numero abſoluto cuicunque, etiam poteſtatibus ſuis incommenſurabiles erunt, ut* R. 7, *quadrato ſuo* 7; R 3) 5 *cubo ſuo* 5. *Ex quo patet eas nullis numeris ſeu integris ſeu fractis exprimi poſſe; Si enim poſſet radix ſurda numero exprimi, cum ejus poteſtas etiam numerus ſit, eſſet ſurda radix ad ſuam poteſtatem ut numerus ad numerum, ac proinde eidem commenſurabilis, contrà quàm oſtenſum jam ſit.*

THEOREMA 2.

SI una radix ſurda, dividens ſurdam alteram, quotientem gignat rationalem, hoc eſt numerum abſolutum, ſurdæ radices illæ commenſurabiles erunt.

Demonſtr. *Data ſint* R. 12 *&* R. 3. R. 3, *dividens* R. 12, *quotientem facit* R. 4, *hoc eſt* 2. *Similiter* R. 8, *dividens* R. 18, *facit* R. *A, hoc eſt* R. B, *hoc eſt fractum* C. *Dico igitur* R. 12, *&* R. 3, *item* R. 18 *&* R. 8 *commenſurabiles eſſe. Nam per definitionem diviſio-*

R. 12 (R. 4 ſeu 2.
R. 3

R. 18 (R. $2\frac{1}{4}$ A

R 8 (R $\frac{9}{4}$ B ſeu $\frac{3}{2}$ C

nis R. 3 dividens eſt ad R. 12 *diviſam, ut unitas ad quotientem* 2. *qui ex hyp. abſolutus numerus eſt.* Ergo, &c.

Pari modo dividens R. 8 *eſt ad* R. 18 *diviſam, ut unitas eſt ad C quotientem abſolutum.* Ergo, &c.

Exempla adhibui radicum quadratarum; ſed eadem eſt ratio quarumcunque.

THEOREMA 3.

SI unâ radice ſurdâ diviſâ per alteram ſurdam, quotiens exiſtat irrationalis, incommenſurabiles ſunt.

Demonſtratio. *Data ſit* R. 48 *&* R. 8. *Hæc illam dividens quotientem gignit* R. 6, *quæ irrationalis ſive ſurda eſt, cùm* 6 *non ſit quadratus. Similiter* R 3) 6, *dividens* R 3) 24, *quotientem gignit* R 3) 4, *irrationalem, cum* 4 *non ſit cubus.*

Dico igitur R, 48 *&* R, 8; *item* R 3) 24, *&* R 3) 6, *incommenſurabiles eſſe. Nam dividens eſt ad diviſam ut* 1, *ad quotientem irrationalem* R. 6 *vel* R 3) 4. *Unitas autem ad quemlibet irrationalem numerum per theor.* 1, *incommenſurabilis eſt. Ergo etiam data radix ſurda dividens, & data ſurda diviſa incommenſurabiles ſunt. Quod erat demonſtrandum.*

R. 48 R. 8	R. 6
R 3) 24 R 3) 6	R 3) 4.

Diviſio ſimplex radicum, quæ in hoc ſcholio aſſumitur, per ſe eſt manifeſta.

CAPUT VIII.

De tabulis quadratorum & cuborum.

SI ſemel tabulæ conficerentur, quibus ſingulorum ab unitate numerorum quadrati & cubi continerentur, ſublata eſſet magna ex parte radicum extrahendarum moleſtia. Præclarè igitur de arithmeticis Paulus Guldinus noſter meritus eſt, qui omnium ab unitate numerorum uſque decimillenarium, quadratos & cubos exhibuit in appendice libri 1. de centro gravitatis.

Conſtructio tabularum.

Tabulas ejuſmodi ut conficias, aut jam confectas extendas, ſingulas ab unitate radices, per ſeipſas multiplica: provenient quadrati omnes, qui rursùm in radices ducti dabunt omnes cubos. Verùm quia multiplicatio in magnis præſertim numeris moleſta eſt, vias alias breviores, quæ ſolâ additione opus habeant, inſignes horum numerorum proprietates ſuppeditant.

Generantur igitur quadrati ordinatim omnes.

1. Ex continua additione numerorum imparium ab unitate. 1 & 3 faciunt 4 primum quadratum: cui ſi addas imparem proximum 5, fit 9 quadratus ſecundus: huic adde imparem tertium 7, fit 16 quadratus tertius: atque ita dein-

deinceps. Demonſtrat Maurolycus l. 1. arithm. p. 15.

2. Quadrati cujuſcumque duplicata radix unitate adjectâ cum quadrato ipſo, dat quadratum proximè majorem. Demonſtrat Maurol. arith. l. 1. p. 15.

Cubi verò ſic.

1. Duo primi impares 3 & 5 dant primum cubum 8. Tres impares ſequentes 7, 9, 11 dant cubum ſecundum 27 quatuor ſequentes impares 13, 15, 17, 19 dant cubum tertium 64. Et ſic deinceps. Demonſtratur à Maurolyco arithm. l. 1. p. 62.

2. Conſtituatur ſeries numerorum à 6 incipiens, & ſemper creſcens per 6 unitas adjecta ad 6 dat 7 differentiam primi cubi & unitatis: quæ adjecta ad 12 dat differentiam cubi ſecundi & tertii: & ſic deinceps omnes cuborum differentiæ reperiuntur. Inventis autem differentiis, habentur cubi: nam ſi unitati addas 7, fit 8 cubus primus, cui ſi addas ſequentem differentiam 19, fit 27 cubus ſecundus, & ſic deinceps. Vide Maurolycum lib. citato.

	Differ.	cub.
6	1	1
12	7	8
18	19	27
24	37	64
30	61	125
36	91	216

Uſus tabularum.

Tabulis jam confectis ſic utere: numerum datum, cujus radix petitur, quære inter quadratos vel cubos; quem ſi reperis, etiam radicem illi adſcriptam pariter invenies; ſi non reperis, quære illo proximè minorem, radix huic adſcripta erit maxima quæ citra fractiones elici ex dato numero poteſt.

Quoniam verò tabulæ Guldini continent quadratos & cubos radicum omnium uſque decimillesimam, cujus quadratus eſt, 100000000, novem conſtans notis, cubus autē 1000000000000 notis conſtans 13; earum ope obtinebitur quadrata radix omnis numeri; qui notis conſtet non pluribus, quàm octo; & radix cubica omnis numeri, qui notis ſcribatur non pluribus; quàm 12.

Quod ſi radix petatur è numero pluribvs notis conſtante, ſemper nihilominus per dictas tabulas membra quatuor majora expedientur. Oporteat ex numero *a c*, elicere radicē quadratam vel cubicam. Partire illum in mēbra. Tum quære in tabulis numerum *a b*

```
  a        b    c
  2,48,09,56,71,92 (1575 —
d 2 48 06 25          f
     k 3 31,

  a           b   c
  23,089,423,791,215 (2847 —
  23 076 099 432,        f
     k 13 32 4368,
```

ex quatuor poſtremis membris conflatum, aut illo proximè minorem, qui erit *d*, & radicem illi adſcriptam *f* poſt lunulam repone. Ex reliquo deinde numero *k b c* extractionem proſequere methodo conſuetâ.

CAPUT IX.

Uſus laminarum tabulæ Pythagoricæ in extrahendâ radice quadratâ & cubicâ.

PArentur duæ laminæ, ut cap. 6. l. 1, quarum alteri inſcribantur unitas & 8 primi quadrati, alteri verò unitas cum 8 primis cubis; eâ lege, ut cum quadrati, unâ conſtant notâ, ſcribantur in triangulo inferiori, cùm binis notis conſtant, prima ſcribatur in triangulo inferiori, ſecunda in ſuperiori; cùm verò cubi tribus conſtabunt notis, duæ primæ in inferiori triangulo reponantur, tertia in ſuperiori cum binis, ambæ in inferiori, & cifra in ſuperiori; cum una, eam loca in inferiori appoſitâ ad lævam cifrâ; itemque aliâ cifrâ in triangulo ſuperiori; Tunc tamen duæ primæ notæ quamvis in eodem triangulo conſiſtant, duo loca efficiunt, ſic ut ſecunda ad decades pertineat. Harum lamellarum hæc cubica, illa quadratica appelletur.

Uſus porrò in extrahendâ radice quadrata hic eſt: Ex ultimo membro radix extrahitur more conſueto. Deinde duplum radicis eatenus acquiſitæ, ſi unicâ notâ conſtet, quære in capite unius laminæ, ſi pluribus, in capite plurium. His ad dextram applicetur lamina quadratica, ad ſiniſtram lamina exponens. Tum adverte quis ordo numerum contineat æqualem aut proximè minorem membro. Numerus laminæ exponentis denominans ordinem apponatur radici antea ac-

acquiſitæ; ipſum verò ordinem exſcriptum aufer à membro. Eodem planè modo reliqua membra expedientur.

In cubicâ ſic proceditur. Oporteat ex numero A educere radicem cubicam.

A
22,022,635,627 (2
8
p 14,022
n 13 952
709

Ex ultimo membro extrahitur radix more conſueto. Maxima radix cubica in 22 eſt 2; ejus cubus 8 ſubtractus à 22 relinquit 14, quibus adſcribe membrum penultimum 022, ut fiat totum (*p*) 14,022.

819 k
11529 b
. . . 6 . c
. 48 . . d
16389 e

Triplum quadrati ex radice hactenus acquiſita, nempe 12 ſtatue in capite duarum laminarum, quibus ad dextram appone laminam cubicam, ad ſiniſtram verò laminam exponentem. Tum adverte quotus ordo ſit æqualis aut proximè minor membro (*p*) lamina exponens indicabit eſſe nonum. Hunc igitur exſcribe, eritque *b*

648 k
10112 f
. . 24 . g
. 36 . . h
13952 n

Supra primam notam 9 ordinis *b* jam exſcripti, ſcribe ejus denominatorem 9, eique verſus lævam appone ejus quadratum 81.

La-

Laminæ cubicæ ad dextram appone laminam quæ habeat in vertice triplum radicis prioris 2, nempe 6, ex hac deſcribe numerum contentum in quadrato deſignato per numeri *k* notam ſecundam, quæ eſt, 1, ea verò deſignat primum loculamentum in quo reperis 6. Scribe ergo 6 infra 1 & 2. Ex eâdem laminâ exſcribe numerum loculamenti deſignati per numeri *k* notam tertiam 8, nempe 48, quem repone infra 8 & 5.

Hos tres numeros *b*, *c*, *d*, collige in unam ſummam *e*, quæ auferenda eſſet à membro *p*; ſed quia non poteſt, pro *b*, exſcribe ordinem octavum, qui erit *f*, & ſupra numeri *f* notam primam 2 ſcribe 8, eique quadratum ejus 64 appone, perque hunc numerum loco numerorum *c*, *d*, reperi alios *g*, *h*, modo jam tradito. Deinde *f*, *g*, *h*, collectos in ſummam *n*, quæ jam minor eſt membro *p*, ſubtrahe à membro *p*. Et reſiduum *q* infra lineam repone.

In membris quæ ſuperſunt, eadem operatio repetitur.

Ratio horum omnium pendet à demonſtrationibus radicum quadratæ & cubicæ cap. 2, & 4. hujus libri & à demonſtratis cap. 8. lib. 1.

ARITH-

ARITHMETICÆ PRACTICÆ.

LIBER IV.

DE REGULIS.

PRacticæ Arithmeticæ quatuor ſunt regulæ. Prima eſt regula proportionum ſive trium: ſecunda Societatum ſive conſortii: tertia Alligationis: quarta poſitionum ſimplex ac duplex, quam alii regulam falſi appellant. Inter has prima præcipua eſt, à qua reliquæ omnes dependent. Illius quatuor ſunt partes, nimirum regula proportionum directa ſimplex, everſa ſimplex, directa compoſita, everſa compoſita. Singularum præcepta hoc quarto libro explicanda ac demonſtranda ſuſcepi.

CAPUT I.

Regula ſimplex proportionum directa & everſa.

Methodus, quâ ex tribus numeris datis erui-tur quartus proportionalis incognitus, re-la proportionum dicitur. Ab aliis ob tres nu-eros datos regula trium ab aliis aurea ob ſum-m utilitatem appellatur.

In quæſtionibus practicis, quæ nimirum ad us humanos pertinent, è tribus numeris datis e cognitis ſemper duo ſunt homogenei, hoc de eadem re inter ſe, quorum unus annexam bet quæſtionem: ut cum dico: 60. aureos ex-ndo 5. menſibus: quot ergo menſibus expen-n aureos 254. numeri homogenei ſive de ea-n re ſunt, 60 aurei, 254 aurei, quorum po-emo annexa eſt quæſtio. Is igitur qui annexam bet quæſtionem tertio loco ponatur; alter de lem re, primo; reliquus, qui ſolitarius eſt, & mogeneus quarto incognito, in medio conſi-t. Si jam ſit ut primus ad tertium, ita ſecun-s ad quartum incognitum, hoc eſt ſi quarto mus major vel minor tertio, tantò ſecundus major vel minor quarto incognito, quæ tum vendæ quæſtioni adhibebitur, regula propor-num directa appellabitur.

Exempl. Duo gradus maximi terræ circuli ntinent milliaria unius horæ 48. Igitur 360 dus hoc eſt tota circumferentia quot millia-continebit?

Grad.

Grad.	Milliar.	Grad.	Milliar.
2	48.	360	.....

Hic quantò primus eſt minor tertio, tantò Secundus eſt minor quarto incognito.

Quod ſi ut primus ad tertium, ita reciprocè quartus incognitus ſit ad ſecundum; hoc eſt, ſi quantò primus eſt major minorve tertio, tantò quartus incognitus debeat eſſe major minorve ſecundo, regula proportionum everſa dicitur.

Exem. 1. Fortalitium abſolvunt 1000 foſſores diebus 12: 325 foſſores quot diebus abſolvent?

Foſſ.	Dies	Foſſ.	Dies.
1000	12	325	...

Hic quantò primus eſt major tertio, tantò quartus incognitus eſſe debet major ſecundo.

Exemp. 2. In urbe obſeſſa 7 menſibus ali poſſunt præſidiarii 1500. Ergo menſibus 12, quot alentur?

Mens.	Præſid.	Mens.	Præſid.
7	1500	12	....

Hic quantò primus eſt minor tertio, tantò quartus incognitus debet ſecundo eſſe minor.

Arithmetici paſſim ex ipſa quæſtione dijudicandum relinquunt, utrùm proportio directa ſit, an everſa ſive reciproca. Rectè id quidem: verumtamen indicium hujus rei certum aſſignari hoc poteſt, ſi duo termini homogenei, hoc eſt de eadem re, aliam rem quampiam unicam, & à quatuor terminis quæſtionis diverſam, communiter reſpiciant, circa quam lato ſaltem modo aliquid agant,

agant, ad quod duo reliqui termini ſe habeant per modum circumſtantiæ, everſa ſive reciproca proportio erit. Ratio colligitur ex prop. 14. l. 6.

In primo exemplo res, circa quam primus & tertius termini, nempe foſſores, aliquid agunt, eſt fortalitium; in ſecundo, eſt annona, obſidionis tempore conſumenda à præſidiariis, termino videlicet ſecundo & quarto.

Solutio directa.

MUltiplica ſecundum per tertium, & productum divide per primum. Quotiens, ſive integer ille ſit, ſive integer cum fracto, erit quartus proportionalis incognitus, qui quærebatur.

Grad.	Milliar.	Grad.	Milliar.
2	48.	360. fiunt	8640.
a	b	c	z

Exempl. Duo gradus maximi terræ circuli continent milliaria Belgica unius horæ 48. Igitur gradus 360, hoc eſt circumferentia tota, quot continet milliaria?

Collocatione factâ, ut ſupra, multiplica ſecundum 48 per tertium 360. Productum 17280 divide per primum 2. Quotiens 8640, eſt quartus, qui petebatur.

Demonſtr. Si quartus proportionalis eſt integer; patet ex p. 19. l. 7. Si eſt integer cum fracto, patet ex eadem prop. & ex iis quæ demonſtravi

lib. 1.

lib. 1.cap. 9. Cum enim ex hyp. *a* ſit ad *b* ut *c* ad *z* quartum qui petebatur, erit per 19. 7. factus ex *a* in *z* æqualis facto ex *b* in *c*. Atqui facto ex *a* in *z* diviſo per *a* proveniet *z*. ergo etiam facto ex *a* in *b* diviſo per *a* proveniet *z*. quod erat demonſtrandum.

Si contingat numeros de eadem re non eſſe ejuſdem nominis & menſuræ, ante operationem erunt reducendi ad eandem, ut ſi exiſtat quæſtio: pro 10 menſibus ſolvi florenos 250: pro 20 diebus ergo, quot ſolvam? 10 menſes & 20 dies ſunt quidem de eadem re, nimirum tempore, ſed menſuræ diverſæ: oportebit igitur 10 menſes priùs ad dies reducere, quàm operatio inſtituatur.

Examen inſtituitur multiplicando primum per quartum, & ſecundum per tertium: ſi enim producta ſint eadem, ritè es operatus. Patet ex p. 19. l. 7.

Solutio everſa ſeu reciproca.

MUltiplica primum per ſecundum: productum divide per tertium. Quotiens, ſive integer fuerit, ſive fractus, erit quartus proportionalis, qui petebatur.

Exempl. Foſſores 1000 munitionem aliquam abſolvunt diebus 12. Foſſores 325 eandem quot diebus abſolvent? collocatione facta ut ſupra, primum 1000 multiplica per ſecundum 12 productum 12000 divide per tertium 325. Quotiens A eſt quartus qui petebatur.

A

$39\frac{300}{235}$

Foſſo-

Foſſores.	Dies.	Foſſores.	Dies.
1000	12	325	$36 \frac{300}{325}$.

Aliud. Arcis præfectus annonâ, quam habet, alere poteſt menſibus 7 præſidiarios 1500. Igitur menſibus 12, quot alet?

Menſ. 7.	Præſid. 1500.	Menſ. 12.	Præſid. 876
A	B	C	D

Primus A 7 ductus in ſecundum B 1500 facit 10500, qui diviſus per tertium C 12 dat quartum D 876.

Demonſtr. Quoniam ex hyp. A eſt ad C, ut reciprocè D eſt ad B, erit invertendo ut C ad A, ſic B ad D.

C. A. B. D.

Atque ita collocatio everſa reducta eſt ad directam, incognito D quartum in utrâque collocatione locum obtinente. Ergo D rite inventus eſt ex producto ipſius A in B, diviſo per C.

Examen inſtitues ducendo primum A in ſecundum B, B & tertium C in quartum D. Si producta ſint eadem, rite operatus es; ut patet ex 19. l. 7. Eſt enim ex hyp. ut A ad C, ita D ad B.

CAPUT II.

Regula proportionum compoſita.

Cum termini dati ſive cogniti ſunt plures, quàm tres, nimirum 5, aut 7 aut etiam plures, regula proportionum compoſita dicitur, eſtque duplex etiam ipſa, directa videlicet, & everſa. Inter terminos datos, tres ſemper præcipui ſunt, & ex his duo de eâdem re quibus cæteri adhærent, unus ſolitarius & homogeneus illi, qui quæritur. Utrum quæſtio directè ſolvenda ſit, an eversè, ex indicio mox dando dijudicabitur.

Compoſita directa.

Mercatores	8)
aureis	1000)
Luc. aureos	700
Mercatores	10)
aureis	4000)
Quot Lucr. aur.?	

1. Proponatur quæſtio terminorum ſex: 8 mercatores, 1000 aureis lucrantur 700 aureos. Igitur 10 mercatores, 4000 aureis, quot aureos lucrabuntur? Tres numeri principales ſunt 8 mercatores, 700 aurei (qui ſolitarius eſt) & 10 mercatores. Duobus de eadem re, reliqui duo adhærent, nimirum aurei 1000 & aurei 4000, qui duorum prin-

principalium de eâdem re (nempe merc. 8. & mercat. 10) quaſi comites ſunt.

Ordo terminorum is erit, qui in exemplo appoſito. Nimirum tertio loco collocabitur principalis ille, qui annexam habet quæſtionem (mercat. 10) cum ſuo comite (aur. 4000.) Primo loco principalis alter de eâdem re (mercat. 8) cum comite ſuo (aur. 1000.) Is verò, qui ſolitarius eſt, ſecundo loco collocabitur.

Terminis hunc in modum conſtitutis, dijudicandum erit, directam proportionem, an everſam contineant: quod quia multi vel ignorarunt, vel neglexerunt, imperfectè & confuſè hanc regulam tradiderunt. Indicium porrò erit hujuſmodi: Si tam in loco ſeu membro primo, quàm tertio, unus terminus reſpectu alterius ſe habeat per modum circumſtantiæ, medii &c; ſcito quæſtionem directè ſolvendam: ſi vero in membro primo & tertio, unus terminus reſpectu alterius quidpiam agat exerceatve, certus eſtó proportionem everſam in quæſtione contineri, ac proinde ſolvendam eſſe eversè.

Ex hoc indicio quæſtio propoſita reperietur eſſe directa: quæ generali artificio ita ſolvitur. Terminos primi loci, 8 & 1000 inter ſe multiplicando reducito ad unum 8000. Similiter termini tertio loco poſiti, 10 & 4000, ad unum reducantur 40,000. Atque ita termini 5 redacti ſunt ad 3.

Aurei.	Lucr. aur.	Aurei.
8000	700	40,000.

Circa quos ſi regula trium ſimplex exerceatur, prodibit numerus incognitus, qui petebatur, 3500 aurei.

Demonſtratio. Operationis manifeſta eſt. Cum enim plures termini per multiplicationem reducuntur ad unum, quæſtio non immutatur. Eadem ſanè quæſtio erit, ſive dicas: 8 mercatores, aureis 1000, lucrantur 700 aureos, igitur mercatores 10 aureis 4000, quot lucrabuntur? ſive dicas: octies mille aureis, mercator 1, lucratur 700; igitur 40, 000 aureorum mercator 1, quot lucrabitur? (Tantùm enim lucratur 1 mercator 8000 aureorum, quantùm 8 mercatores aureis 1000, & tantùm 1 mercator 40, 000 aureorum quantùm 10 mercatores, 4000 aureorum) Atqui in hac poſtrema duo termini evaneſcunt, quod primo & tertio loco iidem recurrant (videlicet, 1, mercator) quorum proinde ratio habenda non eſt. Igitur ſalvâ quæſtione 5 termini ad tres ſunt reducti. Ex quo patet quæſitum.

2. Quæſtio proponatur terminorum octo. Mercatores 8, aureis 1000, menſibus 2, lucrantur aureos 700; igitur 10 mercatores, 4000 aureorum, menſibus 4, quot lucrantur aureos? Ordo terminorum hic erit.

Mercatores	8)
aureis	1000)
menſibus	2)
Lucr. aureos	700
Mercatores	10)
aureis	4000)
menſibus	4)
Quot Lucr. aur?	.....

Dein.

Deinde terminis primi membri per invicem multiplicatis, itemque membri tertii, quæſtio ad terminos reducetur tres, hunc in modum: 8 in 1000 ſunt 8000: quæ ducta in 2, faciunt 16, 000. Hic erit primus terminus: 10 in 4000 ſunt 40,000: hæc ducta in 4 faciunt 160,000: hic erit terminus tertius, ſic ergo ſtabit exemplum.

Aurei.	Lucr. aur.	Aurei.	aur.
16, 000.	700.	160, 000 fiunt	....

Demonſtr. rurſum manifeſta eſt. Nam ad lucrum perinde eſt, ſive dicas, 8 mercatores 1000 aureis, ſive 1 mercator 8000 aureorum. Rurſus perinde eſt; ſive dicas 1, mercator 8000 aureorum, 2 menſibus; ſive, 1 mercator, 1 menſe, 16, 000. Similiter in membro tertio perinde ad lucrum erit, ſive dicas, 10 mercat. 4000 aur. ſive 1 mercator 40, 000 aur; & rurſum perinde eſt ſive dicas 1 mercat. 40,000, aur. 4 menſ. ſive 1 mercator, 1 menſe, 160,000, aur. Igitur per multiplicationem terminorum inter ſe, quæſtio ad hanc formulam reducta eſt.

Mercator	1)
menſe	1)
aureis	16000)
Lucr. aureos	700
Mercator	1)
menſe	1)
aureis	160000)
Quot Lucr. aur.	.....

In qua, quia quatuor termini qui in primo & tertio loco iidem ſunt, evaneſcunt, tota quæſtio à 7 terminis reducta eſt ad 3.

Compoſita everſa ſeu reciproca.

MIrum eſt quàm confusè & imperfectè hæc regula paſſim tradatur, eâ credo de causâ, quod tam illius demonſtrationem, quàm diſcrimen à directa non ſatis obſervaverint.

1. Quæſtio propoſita eſto terminorum ſex. 10 homines expendunt 4 aureos, diebus 3: homines 100, aureos 2000, quot diebus expendent? Terminos eodem ordine quo in directâ collocabis. Tum ex indicio ſuperius tradito deprehendes proportionem everſam, ſive reciprocam contineri in quæſtione, cum tam *a* circa *b*, quam *d* circa *e*, aliquid agat; homines nimirum expendunt aureos. Perſpecto jam genere quæſtionis, accuratiùs adhuc terminorum ſingulorum locus erit determinandus.

Homines	10.	a)
aureos	4.	b)
exp. dieb.	3.	c
Homines	100.	d)
aureos	2000.	e)
Quot dieb. exp?		

Terminus agens, *a* qui non habet annexam ſibi quæſtionem, primus eſto. Illius comes *b*, ſecundus. Tertius *c* ille ſit, qui ſolitarius eſt, & homogeneus quæſito. Quartus ſit agens, qui annexam habet quæſtionem, & primo homogeneus eſt, nempe *d*. Illius comes *e*, ſecundo *b* homogeneus, quinto loco conſiſtat. Ordine terminorum hunc in modum conſtituto, generali artificio quæſtionem propoſitam, & alias ſimiles quaſcunque ſolvemus.

Ter-

Termini primus *a*, tertius *c*, quintus *e* multiplicentur per invicem, & gignant *ace*. Deinde ſecundus *b* ducatur in quartum *d*, & faciat *b d*, productum ſecundum *b d* dividat primum productum *ace*. Quotiens A dabit terminum incognitum, qui petebatur.

$$A \ \frac{ace}{bd}$$

Demonſtratio. Reponatur quinto loco idem terminus, qui ſecundo, ut ſit quæſtio. Si 10 homines, 4 aureos expendunt diebus 3: homines 100, etiam 4 aureos, quot diebus expendunt?

Homines	10. a		
		aureos	4. b
Exp. dieb.	3. c		
Homines	100 d		
		aureos	4. b
Quot dieb. exp?			

Quoniam hic duo termini identici ſunt, ac proinde evaneſcunt, manifeſtum eſt quinque terminos redactos eſſe ad tres *a*, *c*, *d*.

Qui cum ex indicio tradito cap. 1. proportionem everſam contineant, quartus per regulam trium ſimplicem everſam reperiendus eſt. Primus igitur *a* in ſecundum *c*, faciat *a c*; quo diviſo per tertium *d*, quotiens B eſt quartus: ac proinde 100 homines, 4 aureos expendent diebus B. Littera B porro deſignat fractionem ſpecioſam, quæ typis commodè interſeri non poteſt; quod etiam deinceps nota.

$$B \ \frac{a\,c}{d}$$

Quoniam igitur 100 homines 4 aureos expendunt diebus B: iidē 100 homines, 2000 aureos (e) quot diebus expendent? Quoniā hic rurſum duo

	Homines 100. d
Aureos 4. b	
Exp. dieb. $B \frac{ac}{d}$	
	Homines 100. d
Aureos 2000. e	
Quot dieb. exp?	

termini identici ſunt, conſtat terminos quinque redactos eſſe ad tres *b*, B, *e*: qui cum ex indiciis jam traditis proportionem directam contineant, incognitus per ſimplicem directam proportionum regulam inveniri debet. Itaque ſecundus, nempe fractio ſpecioſa per B deſignata, ducatur in tertium *e*, ut traditur l. 2. cap. 6. num. 2, & gignat D, hoc eſt fractionem per D deſignatam: quâ diviſâ per primum *b*, ut traditur lib. 2. cap. 7. num. 2, (multiplicantur enim fractiones ſpecioſæ ut vulgares) provenit quotiens E, indicans 100 homines, 2000 aureos, quot diebus expendant: ac proinde E eſt terminus ille incognitus, qui in quæſtione initio propoſita quærebatur. Atqui E eſt idem cum A ex vi conſtructionis invento. Ergo A eſt terminus incognitus quæſitus. Quod erat demonſtrandum.

$D \frac{ace}{d}$

$E \frac{ace}{bd}$ 150

2. Propoſita ſit quæſtio terminorum octo, vel plu-

plurium. Scriptores 4, paginas 250, linearum 20, ſcribunt diebus 8: igitur Scriptores 6, paginas 350, linearum 25, quot diebus ſcribent? Quoniam tam in primo, quam tertio membro, unus terminus aliquid agit circa alium, nimirum *a* circa *b*, & *d* circa *e*, liquet in quæſtione proportionem reciprocam contineri. Ordo igitur terminorum idem erit qui ſupra; nimirum terminus agens *a*,

Scriptores	4.	a)
Scrib. pag.	250.	b)
Verſuum	20.	m)
Diebus	8.	c
Scriptores	6.	d)
Paginas	350,	e)
Verſuum	25.	n)
Quot dieb. Scr?		

non habens annexam ſibi quæſtionem, primus erit: hunc comites ejus *b* & *m* ſequentur. Medium locum tenebit *c*, qui ſolitarius eſt, & termino incognito homogeneus. Huic proximus erit *d* agens alter, qui annexam habet quæſtionem: quem, *e*, *n*, ejus comites ſubſequentur. Ordine ſic conſtituto. Primo *a* ductus in medium *c*, & proximo *d* prætermiſſo, in omnes illius comites; *e*, *n*, producat *a c e n*. Tum *d* (ille jam prætermiſſus) ductus in omnes comites primi *a*, nempe in *b*, *m*, producat *d b m*. Deinde productum primum *a c e n* dividatur per ſecundum *d b m*. Quotiens P, dabit numerum incognitum, qui quærebatur.

$$P \frac{acen}{dbm} 9\frac{1}{3}$$

Scriptores 6. d
Scrib. pag. 350. e

Verſuum 20. m

Diebus A $\overset{a\ c\ e}{\underset{b\ d}{\text{—}}}$

Scriptores 6. d
Scrib. pag. 350. e

Verſuum 25. n
Quot dieb. Scr? ....

Vide ſcema pag. præc. *Demonſtratio.* Si tertius terminus *m* ponatur etiam loco ſeptimo pro *n*, quæſtio redigetur ad terminos quinque, *a, b, c, d, e*, cujus terminus incognitus, ut jam demonſtratum eſt num. 1, erit A: ac proinde ſcriptores 6, paginas 350, linearum *m* 20 ſcribent, diebus A: igitur iidem 6 ſcriptores, paginas etiam 350, ſed linearum *n* 25 quot ſcribent diebus? hic quia utrimque *d*, *e* numeri ſcriptorum & paginarum iidem ſunt, quæſtio redacta eſt ad terminos tres, nimirum *m*, A, *n*: quæ quia directa eſt, duc A in *n*, ut traditur, l. 2. cap. 6. num. 2. & fiet Q.

Ac deinde hujus. A $\overset{a\ c\ e}{\underset{d\ b}{\text{—}}}$

Quo diviſo per *m*, ut traditur l. 2. cap. 7. num. 2; fiet quotiens R, indicans ſcriptores 6, paginas 350, linearum 25, quot diebus abſolvant; ac proinde eſt is, qui petebatur. Cum igitur R idem ſit cum P, erit P numerus incognitus in quæſtione requiſitus. Quod erat demonſtrandum.

Q $\overset{acen}{\underset{d\ b}{\text{—}}}$

R $\overset{acen}{\underset{dbm}{\text{—}}}$

Pag præced.

Scholium

Scholium.

Quæſtiones ad regulam compoſitam proportionum tam everſam, quàm directam pertinentes, per ulam ſimplicem proportionum bis inſtitutam ſol- poſſe, quamvis inutili circuitu, ex demonſtra- ibus jam allatis manifeſtum eſt: compoſitam vi- icet directam, per directam ſimplicem duplica- n; everſam verò per ſimplicem everſam unam & plicem directam alteram. Id porro, haud ſcio, ſatis fuerit ab Arithmeticis obſervatum, poſſe rſam compoſitam ſolvi per ſimplices duas everſâ lâ interveniente: quod ſic oſtendo.

Reſumatur quæſtio ſupra nu. 1. propoſita.

mines 10)
ureos 4)
diebus 3
mines 100)
ureos 2000)
ot dieb. exp. . . .

Ex qua deſumatur prima quæſtio ſimplex hujuſmodi: Homines 10, diebus 3, expendunt aureos 4: homines ergo 100, diebus etiam 3, quot expendent aureos? formulam hic appoſui, quam patet eſſe directam. Solutione adhibitâ, quartus provenit, aurei 40. Altera jam quæſtio ſit etiam ſimplex: homines 100 expendunt aureos 40, die-

mines 10
diebus 3
. aureos 4
nines 100
diebus 3
ot aur. exp. . . .

3. Ergo iidem homines 100, aureos 2000, diebus expendunt? Formulam inſpice hic appoſitam,

Homines 100
aureos 40
exp. dieb. 3
Homines 100
aureos 2000
Quot dieb. exp.? ....

poſitam, quam iterum patet eſſe directam. Solutione adhibitâ proveniunt dies 150 pro numero incognito quæſito. Et poterunt quæſtiones omnes everſæ compoſitæ, ita ſolvi. Simili modo etiam demonſtrari poteſt, compoſitas directas ſolvi poſſe per unam directam ſimplicem, & everſam alteram.

Hæc ad plenam regulæ trium compoſitæ intelligentiam dicta ſint. Cæterum inutilis ad praxim ille per duplicatam ſolutionem ſimplicem circuitus eſt, quando ſolutionem expeditiorem longè ac breviorem jam tradidimus.

CAPUT III.

Regula Societatum.

DOcet numerum in partes dividere, datis numeris proportionales. Nomen ſortita eſt à ſocietatibus mercatoriis, in quibus uſum habet permagnum. Sic verò inſtituitur.

Datorum ſumma primum locum teneat; ſecundum numerus diſtribuendus: tertium ſinguli datorum. Exerceatur deinde toties regula, trium, quot ſunt dati. Numeri inventi ſatisfacient quæſtioni. ſi numeris datis temporum diverſitas ſit adjuncta, prius in ſuum ſinguli tempus ducantur, quàm ad unam ſummam redigantur.

Quæſtio.

Quæſtio. 1. Tres mercatores, initâ ſocietate, lucrati ſunt aureos 4500. Primus expoſuit aureos 100. alter 150; tertius 200. Quantùm ex lucro communi cuique debetur?

Manifeſtum eſt lucra ſingulorum debere pecuniis in ſortem collatis eſſe proportionalia, adeoque lucrum commune 4500 aur. dividendum in partes pecuniis collatis ſingulorum proportionales.

Sic igitur quæſtio ordinabitur.

		Dati	Quæſiti
Summa dat.	Lucr, com.	100. c	1000. f
450.	4500	150. d	1500. g
a	b	200. e	2000. h

Tum quære, ſi 450 aurei lucrantur aureos 4500. ſinguli dati (hoc eſt pecuniæ à ſingulis in ſortem datæ) quot lucrantur aureos? Regulâ trium ter inſtitutâ, provenient quæſiti. Conferenti 100 debentur 1000, conferenti 150 debentur 1500, & 2000 ei, qui 200 contulit.

Demonſtr. Ex vi conſtructionis ut *a* eſt ad *b* ſic *c* eſt ad *f* & ſic *d* eſt ad *g* & ſic *e* eſt ad *h*. Ergo per 11. l. 6. *c* eſt ad *f*, ut *d* eſt ad *g*, & ut *e* eſt ad *h*. Igitur permutando per 16. l. 5, ut *c* eſt ad *d* ſic *f*, eſt ad *g*; & ut *d* eſt ad *e*, ſic *g* eſt ad *h*: & ex æquo per 22. l. 5. *c* eſt ad *e*, ut *f* ad *h*. Conſtat ergo fides operationis.

Quæſtio 2. Tres mercatores lucrati ſunt aureos 9000. Primus contulit aureos 100 per menſes 16: ſecundus 140 per menſes 10: tertius 300 per menſes 7. Quantum ſingulis debetur?

Aurei à ſingulis collati ducantur in tempora,

&

2. Cum plura, quàm duo, pretia dantur, ſingula binatim inter ſe alligentur, his tamen legibus ſervatis. 1. Quæ alligantur, neque ſimul majora ſint pretio medio, neque ſimul minora. 2. Exceſſus majoris pretii dati ſupra medium, adſcribatur minori pretio; defectus autem minoris à medio, apponatur majori. 3. His ſalvis perinde eſt quocunque ordine inter ſe data pretia alligentur: & poteſt unum alligari ſæpius (hoc eſt cum diverſis) modò ſingula ſaltem alligentur ſemel. Unde fit ut eadem quæſtio multas ſolutiones admittat, ut infra demonſtrabitur.

Alligationibus peractis regula proportionum ut ſupra, toties exercebitur, quot pretia ſunt data. In ea primum locum teneat ſumma differentiarum; ſecundum quantitas ſeu numerus mixti, tertium differentiæ ſingulæ; aut, ſi uni pretio plures ſunt adſcriptæ, ſummæ earum ſingulæ.

Exempl. Libra 1, Garyophilli valet juliis 3, Piperis 4, Cinnamomi 6, Zingiberis 8, Croci 10. Quantum ex ſingulis debeo accipere, ut mixti libra 1, valeat juliis 7? vel ut habeam mixti libras 12, quarum una valeat juliis 7?

	Pret.	data.	Differ.
	Garyoph	a 3.	1. 3
Mixti Pret. med.	Piperis	b 4.	3. 1
7.	Cinnam.	c 6.	1. 3
	Zingib.	d 8.	4. 3. 1
	Croci.	e 10.	4. 3. 1

Differ.

		Differ.	Quæſit.	
		4?	$\frac{4}{28}$	m
Sum. diff.	Mixti	4?	$\frac{4}{28}$	m
28.	lib. 1.	4?	$\frac{4}{28}$	m
		8?	$\frac{8}{28}$	n
		8?	$\frac{8}{28}$	n

In hoc exemplo factæ ſunt omnes alligationes poſſibiles, quæ ſunt *ad. ae. be, bd. cd. ce.* Igitur Garyophilli, Piperis, Cinnamomi, ex ſingulis partes *m* unius libræ,& Zingiberis ac Croci etiam ex ſingulis partes *n* unius libræ, dabunt mixti libram 1, pretii 7 Juliorum.

Hoc porrò exemplum præter ſolutionem jam datam, alias admittit. Ut infra oſtendetur. Accipe unius adhuc ſolutionis formulam. Alligationes ſunt, *ad, bd, ce.*

	Pret. data		Differ.	
	Garyoph.	a 3.	1.	
Mixti.	Piperis	b 4.	1.	
Pre. med.	Cinnam.	c 6.	3.	
7	Zingib.	d 8.	4.	3.
	Croci.	e 10.	1.	

Sum. diff.	Mixti.	Differ.	Quæſit.	
		I	$\frac{1}{13}$	f
		I	$\frac{1}{13}$	f
13	lib. 1.	3	$\frac{3}{13}$	p
		7	$\frac{7}{13}$	q
		I	$\frac{1}{13}$	f

Quæſiti *f, f, p, q, f,* indicant quot partes libræ ex ſingulis acceptæ conficiant mixti libram unam pretii medii 7. Juliorum.

Examen ita fiet. Si Garyophilli una libra valeat 3 Juliis, libræ pars *f* quantùm valebit? Rurſum ſi 1 libra piperis, &c. Pretia per regulam trium inventa collige in unam ſummam; hæc pretio medio æqualis erit, ſi bene fueris operatus.

Demonſtratio, cum duo tantùm pretia diverſa ſunt alliganda.

QUæſtio ſit: libra, 1, piperis valet 4, juliis, libra croci, 9: quātùm			Differ. croci
		Pip. 4 a	2. e
	Mixti Pret. medium 7. c.		Diff. Pip.
		Croci. 9. b.	3. d
			5 f
			Sum. differ.

ex utroque ſumere debeo, ut libra 1 mixta valeat Juliis 7? Cum ad ſolvendam quæſtionem in regula trium primus locus debeatur ſummæ differentiarum, ſecundus numero mixti, ſive ejus quantitati, tertius ſingulis differentiis reciprocè collocatis; demonſtrandum eſt, totius mixti quantitatem ſeu numerum, libram ſcilicet 1, ita eſſe ad croci, qui in mixto eſt, quantitatem ſeu numerum incognitum, ut (*f*) ſumma differentiarum eſt reciprocè ad (*d*) differentiam piperis à pretio medio. Quod fiet hunc in modum.

Exceſſus *e* pretii unius libræ croci, ſupra pretium medium unius libræ mixti, præcisè oritur à pipere quod eſt in mixto: & defectus *d* pretii unius libræ piperis à pretio medio unius libræ mixti, præcisè oritur à croco, qui eſt in mixto. Ergo exceſſus *e* pretii unius libræ croci eſt ad defectum *d* pretii unius libræ piperis, ut reciprocè piper quod eſt in mixto, ad crocum, qui eſt in mixto. Ergo componendo ut *e* cum *d* eſt ad *d* exceſſus nimirum croci cum defectu piperis, ad piperis defectum, ita piper cum croco, in mixto, hoc eſt tota mixti quantitas, libra nempe una, eſt ad quantitatem croci in eodem mixto. Quod erat demonſtrandum.

Demonſtratio Univerſalis, ſive duo tantum pretia, ſive quotlibet ſint alliganda.

HAnc rem non eſſe dèmonſtratu facilem, apparebit (niſi fallor) ex iis, quæ hîc ſubjungam. Quæ attulere nonnulli, nullam demonſtrationis

tionis ſpeciem habent, ut ne ſciviſſe quidem videantur, in quo difficultas conſiſteret, aut quid demonſtrandum ſibi eſſet. Utar porrò (quod jam feci ſæpius) logiſticâ ſpeciosâ, quæ huic rei demonſtrandæ conducet plurimùm. Quare hæc iis ſcribo, qui jam in ea utcunque ſunt verſati.

Scema. 1:

	4. b	e-a
	6. c	d-a
7. a	8. d	a-c
	9. e	a-b

1. Rerum quatuor miſcendarum pretia diverſa ſint *b*, *c*, *d*, *e*: pretium medium ſit *a*. Exceſſus *e* ſupra *a* eſt *e-a*, ex præcepto regulæ adſcribendus minori *b*: defectus *b* ab *a* eſt *a-b*, apponendus majori *e*. Exceſſus *d* ſupra *a* eſt *d-a*, quem adſcribe minori *c*: defectus *c* ab *a* eſt *a-o*, quem appone majori *d*. Valebit porrò jam afferenda demonſtratio, quocunque tandem ordine (ſervatis tamen præſcriptis in regula conditionibus) inter ſe pretia diverſa alligentur.

2. Manifeſtum eſt in qualibet differentia per exceſſum, negari *a* pretium medium, affirmari verò pretia majora data *e*, *d*; quod ita exprimitur *e-a*, hoc eſt *e* minus *a*; *d-a*, hoc eſt *d* minus *a*. Rurſum patet in omni differentia per defectum, affirmari *a* pretium medium, negari verò pretia data minora *b*, *c*; quod ſic exprimitur *a-c*, *a-b*. Sed, quia ex præſcripto regulæ, pretiorum quæ alligantur, ſemper unum majus eſt pretio medio, alterum minus (aut certè æquale) tot ſemper erunt differentiæ per exceſſum, quot per defectum. Ergo ſi omnes differentiæ in unam ſummam F colligantur

F

$$e-a+d-a+a-c+a-b$$

gantur ; hæc duo infallibiliter evenient : primò litteræ pretia medio *a* majora deſignantes , ſemper reperientur affirmatæ ; litteræ verò totidem deſignantes pretia medio *a* minora, ſemper negatæ : ſecundò *a* medium pretium deſignans toties negata reperietur , quoties affirmata ; negata quidem in differentiis majorum pretiorum; affirmata verò in differentiis pretiorum minorum ; ac proinde litteris *a* ſe mutuo tollentibus differentiarum ſumma erit G, conſtans ſemper litteris data pretia deſignantibus.

G

$$e+d-c-b$$

3. Ut verò ſciatur , quantum ex ſpeciebus ſingulis diverſorum pretiorum , *b*, *c*, *d*, *e* ſumi debeat, ut ex iis permixtis una libra valeat pretio medio *a*, ex regulæ præſcripto, ponitur primo loco ſumma differentiarum, ſecundo 1 libra, tertio ſingulæ differentiæ;ac tum per regulam trium

Different. *Scema* 2.

Sum. differ.	libra			
		e-a	$\frac{e-a}{e+d-c-b}$	P ex b
		d-a	$\frac{d-a}{e+d-c-b}$	Q ex c
e+d-c-b	1.	a-c	$\frac{a-c}{e+d-c-b}$	R ex d
		a-b	$\frac{a-b}{e+d-c-b}$	S ex e

Different. *Scema* 2.

Sum. differ.	libra			
		e-a	$\frac{e-a}{e+d-c-b}$	P ex b
		d-a	$\frac{d-a}{e+d-c-b}$	Q ex c
e + d-c-b	1.	a-c	$\frac{a-c}{e+d-c-b}$	R ex d
		a-b	$\frac{a-b}{e+d-c-b}$	S ex e

inveniuntur quarti proportionales P, Q, R, S. Qui quidem, quod ſecundus terminus ſit unitas, exhibentur dividendo ſolum differentias ſingulas per differentiarum ſummam. Itaque quarti illi proportionales P, Q, R, S ſunt fractiones, quarum communis denominator eſt differentiarum ſumma *e+d-c-b*; numeratores verò differentiæ ſingulæ, eo ipſo ordine, quo num. 1. fuere alternatim pretiis diverſis *b*, *c*, *d*, *e* appoſita.

4. Nunc quia in regula aſſeritur P, Q, R, S indicare quantum ex ſpeciebus ſingulis diverſorum pretiorum, *b*, *c*, *d*, *e* ſumi debeat, ut una libra ex iis mixta, valeat pretio medio *a*, utrumque oſtendi debet, & P, Q, R, S, efficere unam libram, & P, Q, R, S ſimul, valere pretio medio *a*. Primum patet ex 24. 5. Nam ex conſtr. ſumma differentiarum eſt ad ſingulas differentias, ut 1 libra ad ſingulas P, R, R, S. Ergo ut ſumma differ. eſt ad omnes ſimul differentias, ita una libra eſt ad omnes ſimul, P, Q, R, S. Atqui ſumma differ. æquatur differentiis ſimul omnibus. Ergo etiam 1 libra omnibus P, Q, R, S æqualis eſt.

5. Al-

5. Alterum verò, in quo præcipua difficultas eſt, & cujus gratia ſuperiora omnia num. 1. 2. 3 præmiſimus, ſic oſtendo. Ut inveniantur pretia, ſeu valores ſingulorum P, Q, R, S, ſtatuatur in regula trium pro loco 1, libra; ſecundo *b*, *c*, *d*, *e* pretia diverſa ſingularum ſpecierum; tertio ſingula P, Q R, S, & dic: ſi 1 libra ſpeciei primæ valeat florenis *b*; unius libræ pars à P deſignata, quantùm valebit? & ſic in aliis.

Scema 3.

1. lib.	4. b	$\frac{e-a}{e+d-c-b}$	P	$\frac{be-ba}{e+d-c-b}$	V
	6. c	$\frac{d-a}{e+d-c-b}$	Q	$\frac{cd-ca}{e+d-c-b}$	T
	8. d	$\frac{a-c}{e+d-c-b}$	R	$\frac{da-dc}{e+d-c-b}$	X
	9. e	$\frac{a-b}{e+d-c-b.}$	S	$\frac{ea-eb}{e+d-c-b.}$	Z
				$\frac{ea+da-ca-ba}{e+d-c-b.}$	N

Quoniam verò in primo loco habetur unitas, ut inveniantur quarti, V, T, X, Z, oportebit ſolùm ſingula *b*, *c*, *d*, *e*, pretia ducere in ſingulos fractionum P, Q, R, S, numeratores (qui, ut oſtendi nu. 3, ſunt ipſæ pretiorum differentiæ,) iiſque ſupponere, communem denominatorem $e+d-c-b$, quem oſtendi num. 3. Eſſe differentiarum ſummam. Nunc fractiones ipſas V, T, X, Z, jam inventas expendamus. Si harum numeratores in unam

 ſum-

ſummam colligamus, reperimus eas particulas in quibus *a* pretium medium deſignans non reperitur, ſe mutuò tollere: quod ſic oſtendo. Ut habeatur numerator ipſius V, nempe *be-ba*, pretium *b* ducitur in numeratorem ipſius P, hoc eſt in differentiam quæ in ſcemate primo ipſi *b* fuit appoſita; ea autem erat differentia pretii majoris *e*, nempe *e-a*, in qua (ut oſtendi num. 2.) reperitur † e, hoc eſt, *e* pretium majus affirmatum. Ergo in numeratore ipſius V, neceſſariò reperitur † *be*, hoc eſt *be* affirmatum. Rurſum ut habeatur numerator ipſius Z, ducitur pretium majus *e* in numeratorem ipſius S, hoc eſt in differentiam *a-b*, quæ ipſi *e* in 1 ſcemate fuit appoſita; ea autem eſt differentia pretii minoris *b*, in qua (ut num. 2 oſtenſum eſt) reperitur *-b*, hoc eſt pretium minus *b* negatum. Ergo in numeratore ipſius Z, neceſſariò reperitur eadem particula *be*, quæ in V, ſed jam negata, hoc eſt *-be*. Ergo in V & Z, duæ particulæ †*be* & *-be*, in quibus *a* non reperitur, ſe mutuò tollunt. Eodem modo oſtendam in numeratoribus fractionum T & X, particulas in quibus non eſt *a*. (ſunt *ea* hic † *c d* & *-dc*) ſe invicem ſimiliter tollere.

Itaque ſumma numeratorum in V, T, X, Z, eſt *ea*†*da-ca-ba*. in cujus particulis ſingulis reperitur *a*: huic ſummæ ſi ſubſcribatur communis denominator, *e*†*d-c-b*, erit fractio N par omnibus V, T, X, Z. Deinde quia genita eſt ſumma hæc *ea*†*da-ca-ba*, pretia majora *e*, *d* ducendo in ſibi appoſitas pretiorum minorum differentias, *a-c* & *a-b*, in quibus (ut oſtenſum num. 2.) *a* affirmatur, patet in particulis hujus ſummæ ſigno † af-

fectis

4. b 6. c 8. d 9. e — 1. lib.

$$\frac{e-a}{e+d-c-b}\ P \qquad \frac{be-ba}{e+d-c-b}\ V$$

$$\frac{d-a}{e+d-c\ b}\ Q \qquad \frac{cd-ca}{e+d-c-b}\ T$$

$$\frac{a-c}{e+d-c-b}\ R \qquad \frac{da-dc}{e+d-c-b}\ X$$

$$\frac{a-b}{e+d-c-b.}\ S \qquad \frac{ea-eb}{e+d-c-b}\ Z$$

$$\frac{ea+da-ca-ba}{e+d-c-b.}\ N$$

ſtis neceſſariò reperiri pretia majora *e, d.* ri modo quia in procreatione hujus ſummæ *a+da-ca-ba*) pretia minora *c, b,* ducta ſunt in oſitas ſibi pretiorum majorum differentias, , & *d-a*, in quibus oſtendi ſupra num. 2. *a* gari; manifeſtum eſt in particulis hujus ſum- e (quæ eſt numerator ipſius N) ſigno (-) af- tis, neceſſariò reperiri pretia minora *c, b.* Er- in numeratore ipſius N pretia majora *e, d* eriuntur affirmata, minora verò *c, b,* negata. qui ſupra num. 2. oſtenſum eſt, etiam diffe- tiarum ſummam *e+d-c-b*, quæ eſt fractionis denominator, conſtare pretiis majoribus *e, d* rmatis, minoribus verò, *c, b,* negatis. Ergo fractionis N numeratore reperiuntur eædem eræ & iiſdem ſignis affectæ, quæ in denomi- ore. Ergo ſi numerator dividatur per deno- natorem, quotiens erit *a*; (Si enim denomi- or ducatur in *a*, reſtituetur idem numera- .) Ergo fractio N æquivalet ipſi *a* pretio me-

medio. Atqui jam oſtendi N æquari omnibus V, T, X, Z, valoribus ipſorum P, Q, R, S. Ergo P, Q, R, S ſimul valent pretio medio *a*. Quod erat demonſtrandum.

Quod ſolutiones diverſas eadem quæſtio admittat juxta praxim jam traditam.

ARithmetici ſcriptores plerique aſſerunt pretia data diverſimodè alligari poſſe, ac proinde eandem quæſtionem, plures ſolutiones admittere. Sed quantus ſolutionum diverſarum ſit numerus, & quo artificio illæ omnes exhibeantur, altum apud illos ſilentium eſt. Nimirum ut demonſtrationem ipſam hujus regulæ, ita & determinationem ipſius pulcherrimam aut ignorarunt, aut certè immeritò neglexerunt.

Ejuſdem igitur quæſtionis ſolutiones omnes poſſibiles invenientur huncin modum.

1. Vide quoties pretia data inter ſe binatim poſſint combinari diverſimodè; hoc eſt inveniantur omnes diverſi biniones, qui ex datis pretiis haberi poſſunt, ut trademus, l. 5. c. 8. In quæſtione n. 2. ſupra, quinque dantur pretia, *a,b,c,d,e,* quorum biniones diverſi ſunt 10.

2. Vide quot ex his binionibus ſint apti ad alligandum; ad quod requiritur ut binionis utrumque membrum, neque ſimul majus ſit, neque ſimul minus pretio medio. Ex 10 binionibus quæſtionis ſupra datæ, tantùm ſex apti ſunt, nimirum *ad, ae, be, bd, ce, cd.*

3. Vide

3. Vide quis minimus ſit alligationum numerus ad quæſtionem ſolvendam neceſſarius. Si multitudo pretiorum datorum par eſt, ejus ſemiſſis dabit minimum numerum alligationum: ſi impar, ejus ſemiſſis unitate aucta. Ratio eſt, quia ſingula pretia data ſaltem alligari debent ſemel. In exemplo noſtro. Quia 5 pretia dantur *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, minimus alligationum numerus, quo ſolvi quæſtio poteſt. eſt 3.

4. Inſpice biniones aptos num. 2. inventos, & quære, omnes eorum diverſos, terniones, & omnes eorum diverſos quaterniones, & ſic deinceps incipiendo à minima ſpecie num. 3. inventâ, uſque ad proximè minorem numero aptorum binionum, ut tradetur l, 5. c. 8. In exemplo noſtro quoniam biniones apti ſunt ſex num. 2. reperti, oportebit omnes eorum diverſos reperire terniones, qui ſunt 20, & quaterniones, qui ſunt 15; & quinterniones, qui ſunt, 6.

5. Inquire quot ex binionum aptorum ternionibus, & quaternionibus &c. ſint apti ſolvendæ quæſtioni. Illi porro erunt apti, in quibus ſingula pretia data *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, reperiuntur; inepti in quibus aliquod eorum deeſt. Singuli horum inventorum ternionum, quaternionum, &c. ſingulas dabunt quæſtionis datæ ſolutiones, quibus eam adde, quam exhibet tota binionum aptorum ſumma. Præter has nullæ erunt alligationes aliæ poſſibiles.

In exemplo noſtro pretia dantur quinque, quæ artificio jam explicato comperies alligari poſſe modis diverſis, 25, ac totidem proinde exhiberi poſſe quæſtionis datæ ſolutiones.

Alli-

Alligatio.

1.	2.	3.	4.	5.	6.
ad	ad	ad	ae	ae	ae
bd	be	be	cd	bd	be
ce	cd	ce	bd	ce	cd

7.	8.	9.	10.	11.	12.
ad	ad	ad	ad	ad	ad
ae	ae	ae	ae	bd	bd
bd	bd	bd	be	be	be
cd	ce	cd	ce	cd	ce

13.	14.	15.	16.	17.	18.
ad	ad	ae	ae	ae	ae
bd	be	bd	bd	bd	be
cd	cd	be	be	cd	cd
ce	ce	cd	ce	ce	ce

19.	20.	21.	22.	23.	24.	25
ad	ae	bd	be	cd	ce	ad
ae	bd	be	cd	ce	ad	ae
bd	be	cd	ce	ad	ae	bd
be	cd	ce	ad	ae	bd	be
cd	ce	ad	ae	bd	be	cd
						ce

Dixi ſupra in titulo hujus diſcurſus: *juxta praxim hactenus traditam.* Itaque cum dicitur præter ſolutiones dicto modo inventas non plures eſſe poſſibiles, intellige ſi utamur modo alligationis

tionis conſueto, qui ſupra num. 2. traditus eſt. Alias quæcunque quæſtio ad regulam alligationis pertinens, in qua plura duobus pretia dantur, ſolutiones admittit infinitas. Quod ſic demonſtro. Reſumatur quæſtio ſuperior, in qua ex pretiis datis ſeligatur pro arbitrio unũ pretio medio minus, puta *a*, cum quo reliqua *b*, *c*, *d*, *e*, tanquam unum, comparentur. Accipiatur quivis numerus *f* major tum minimo ipſorum *b*,*c*,*d*,*e*, tum etiam medio 7: minor verò *e* maximo ipſorum. Ex regula alligationis jam traditâ, liquet res pretiorum *b*,*c*,*d*,*e* ita miſceri poſſe, ut una libra mixti ex illis valeat pretio *f*, 9 Juliis.

				Differ.
	a. 3			2.
Mixti	b. 4)			
pret. med.	c. 6)	f		
7	d. 8)	9		4
	e. 10)			

Pro ſpeciebus igitur, *b*,*c*, *d*, *e*, ſumatur ex iis mixtum, cujus una libra valeat pretio *f*. Tum per regulam alligationis ſimplicem, numero 1. traditam, inveniatur mixtum *x*, *z* ex *f* & *a*, cujus una libra valeat pretio medio 7. Liquet igitur *x*, *z* libram

				Differ.
	a. 3			2
Mixti				
Pret. med.	b. 4)			
7.	c. 6)	f		
	d. 8)	9		4
	e. 10)			

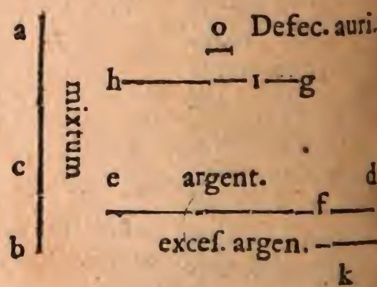
	2	2) / 6)	x
6. lib. 1.			
	4	4) / 6)	z

eſſe

eſſe mixti ex omnibus datis *a, b, c, d, e*, cum *x*, z mixtum ſit ex *a*, & *f*; *f* autem mixtum ex *b, c, d, e*. Atque ita per aſſumptum numerum *f* majorem tum minimo ipſorum *b, c, d, e*, tum ipſo medio; minorem verò *e* maximo, una habetur ſolutio quæſtionis, quæ toties variabitur, quoties pro *f*, alius ejuſmodi medius aſſumetur diverſus. Atqui tales medii diverſi aſſumi poſſunt, adhibitis fractionibus, infiniti. Ergo quæſtionis datæ ſolutio variabitur infinities. Quod erat propoſitum.

Furtum aurifabri in corona Hieronis Regis detectum.

CUm Hiero Syracuſarum Rex Coronam auream Diis voviſſet, & aurifaber ſublatâ portione auri, argenti tantundem ſubſtituiſſet, fraus ab Archimede detecta eſt. Sed quo præcisè artificio non ſatis conſtat. Varii ſunt modi; qui regula alligationis utitur, omnium facillimus eſt.



Referant *ab*, *ed*, *hg* tres maſſas metalli ſingulas libr. 10, & ſit aurea, *hg*; *ed* argentea, *ab* verò ea, de

qua dubitatur, an mixta ſit ex auro & argento.

Primò invenienda eſt ex hydro-ſtaticæ principiis trium maſſarum proportio quoad molem; ad quod minimè opus eſt, ut de facto habeantur maſſæ, aurea & argentea uti in hydro-ſtatica, ſi Deo placuerit, oſtendam. Quod ſi moles *a b* media reperiatur inter auream *g h* & argenteam *e d*, certum erit in *a b* admixtum eſſe argentum. Quâ verò proportione, per alligationis regulam innoteſcet.

Eſt enim ut differentiarum ſumma *k*, *o* ad O differentiam ſeu defectum molis aureæ *hg* à mixta *a b*; ita 10 libræ mixti *a b*, ad libras argenti in *a b*.

Id verò eodem modo demonſtratur, ut ſuprà Nam *k* exceſſus in mole argenti ſupra mixtam *a b* præcisè oritur ab auro, quod eſt in mixto; & defectus auri *hg* à mixto, præcisè oritur ab argento, quod eſt in mixto. Ergo *k* exceſſus argenti *e d* eſt ad *o* defectum auri *hg*, ut reciprocè quantitas ſeu pondus auri in 10 libris mixti *a b*, eſt ad pondus argenti in eodem mixto. Igitur componendo totum mixti pondus argenti, nempe 10 libræ, eſt ad pondus argenti in mixto, ut *k* cum *o* (hoc eſt differentiarum ſumma) eſt ad *o* auri defectum. Quod erat propoſitum.

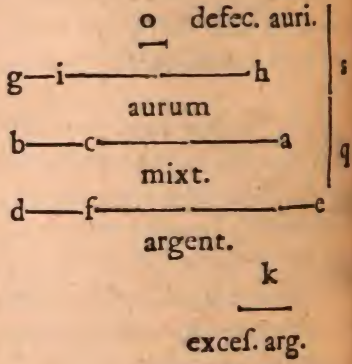
Si ergo *k* ponatur eſſe ad *o* ut 15 ad 1, per regulam trium deprehendentur in *a b* maſsâ 10 libr. eſſe unius libræ argenti 5 octavas.

Quod ſi detur mixtum ex metallis tribus aut pluribus, nullo artificio deprehendi poterit, quâ proportione ſint commixta, quod ea poſſit infinities variari, ut demonſtravi ſupra.

Alia

Alia Demonſtratio.

QUamvis demonſtratio jam allata mihi videatur clariſſima eſſe; atque id ipſum pateat ex demonſtratione univerſali ſupra: tamen quod in hac re demonſtranda nobiles Geometræ & imprimis Marinus Getaldus in Archimede promoto laborarint, viſum eſt hoc ipſum alio modo & faciliori quàm ſit ille Getaldi, demonſtrare.



Argentum in mixto AB repræſentet CB, aurum CA. Tum in argentea mole DE, intelligatur DF, par BC in aurea verò HI, par AC. Quoniam ex hypotheſi DE excedit AB per K, & ablatis utrimque æqualibus DF, BC, etiam FE excedet AC, hoc eſt per conſtr. HI, per K. Pari modo quia AB excedit GH per O, ablatis æqualibus AC, HI, etiam BC, ſeu FD, excedet GI, per O. Jam quia Argentum BC, & argentum DF æqualia ſunt mole, adeoque etiam pondere, & totum pondus AB toti ponderi DE per hyp. ſit æquale; erit quoque pondus reliquum auri AC, hoc eſt HI per conſt. æquale ponderi reliquo argenti EF, Igi-

·. Igitur moles argentea EF eſt ad molem au-
am HI, ut reciprocè gravitas auri ad gravita-
n argenti, Exemp. gr. ut QS ad S. Ergo divi-
ndo K (qui eſt exceſſus EF ſupra HI, ut oſtendi
ra) eſt ad HI, ut Q ad S. Deinde, quia jam
endimus æqualia eſſe pondera EF, HI, cum
am per hyp. æqualia ſint tota ED, HG, liquet
iqua FD, IG paria eſſe. Rurſum igitur argen-
moles DF eſt ad auream molem IG, ut reci-
ocè gravitas auri ad gravitatem argenti, hoc
ut QS ad S. Igitur dividendo O, qui eſt ex-
ceſſus FD (per demõſtrata ſuperius) ſupra IG, eſt ad IG ut Q ad S. Atqui jam oſtenſum eſt etiam ut Q eſt ad S, ita K eſſe ad HI. Ergo ut K ad HI, ſic O eſt ad IG: & permutando ut K eſt ad O, ſic HI eſt ad IG: & componendo ut K cum O eſt ad O, ſic HG



ad IG, & (quia HG eſt moles homogenea)
pondus HG ad pondus IG. Atqui pondus HG
hyp. eſt pondus AB; & pondus IG ſupra
endi eſſe pondus argenti FD, ſeu CB. Ergo ut
um O ad O, ita mixti pondus AB eſt ad CB
ndus argenti in eodem mixto. Quod erat de-
nſtrandum.

CAPUT V.

Regula poſitionis ſimplex.

PRo quæſito numero pone quemvis numerum (qui hypotheſis appellabitur) eumque examina juxta tenorem quæſtionis. Is ſi quæſtioni non ſatisfaciat, in regula trium primum locum teneat numerus ex decurſu inventus, ſecundum hypotheſis, tertium numerus in quæſtione datus. Quartus ex his inventus ſolvet quæſtionem.

Illæ igitur quæſtiones & ſolæ per unam poſitionem ſolvi poſſunt, ex quarum decurſu inventus eſt ad hypotheſim, ut numerus datus ad quæſitum.

Quæſtio 1.

Tres ſimul debent 7000. Primus autem debet duplo plus, quàm ſecundus, & hic triplo minus, quàm tertius. Singuli quantum debent?

Pone ſecundum debere 100. Ergo primus debet 200. tertius 300: quæ ſimul conficiunt 600. deberent autem conficere 7000.

Numerus inventus 600 ſit primus in regula trium; hypotheſis 100, ſecunda; datus in quæſtione 7000, tertius. Ex his invenitur quæſitus A. Igitur ſecundus habuit A, primus B, tertius C, qui numeri ſimul juncti conficiunt 7000.

A $1166\frac{2}{3}$

B $2333\frac{1}{3}$

C 3500

Demo-

Demonſtratio hujus exempli atque adeo totius Regulæ per ſe eſt manifeſta.

Quæſtio 2.

HOſtilis exercitus tertia pars cæſa eſt, pars quarta capta, 1000 fugerunt. Quot ergo fuere univerſi? quot cæſi? quot capti?

Pro quæſito totius exercitus numero pone quemvis numerum, qui habeat datas partes, exemp. gr. 12. Igitur cæſi ſunt 4, capti 3, & ſuperſunt 5, qui fugerunt, deberent autem fugiſſe 1000. Numerus ex decurſu inventus 5, primus eſto in regula trium; hypotheſis 12 ſecunda; datus 1000, tertius; ex his prodit quæſitus 2400, cujus tertia pars eſt, 800; quarta pars capta eſt 600: 800 autem & 900 cum 1000 fugitivis conficiunt 2400.

Quæſtio 3.

Tertiam itineris partem confeci eques, quintam pedes, quæ ſimul efficiunt 50 leucas. Quot ergo milliaria totum iter complectitur? quot eques abſolvi? quot pedes?

Pro itinere toto pone quemvis numerum, datas habentem partes, puta 15. Eques igitur confeci 5 milliaria, pedes 3, quæ ſimul efficiunt 8 milliaria. Deberent autem conficere 50. In regula trium primus eſto 8, numerus invẽtus; hypotheſis 15, ſecunda; datus 50 tertius: ex quibus prodit quæſitus A.

A $93\frac{3}{4}$

B $31\frac{1}{4}$

C $18\frac{3}{4}$

Totum ergo iter eſt milliaria A, cujus pars tertia equeſtris eſt B, pars verò quinta pedeſtris eſt C; quæ ſimul efficiunt 50 milliaria.

Quæſtio 4.

Si præſidium augeretur tertiâ ſui parte & adhuc 100 accederent, eſſent milites 3000. In præſidio igitur quot ſunt?

Hæc quæſtio, & hujuſmodi aliæ, ſic propoſitæ, unicâ poſitione ſolvi nequeunt. Ut ergo per unam poſitionem hujuſmodi quæſtiones ſolvantur, numerus integer 100 fractionibus, quæ partes denominant numeri quæſiti, adhærens, auferendus eſt à dato numero 3000, ut fiat 2900; atque interim quæſtio ſic formanda: Si præſidium tertiâ ſui parte augeretur, milites eſſent 2900. Quot igitur ſunt in præſidio? operando ex præſcripto regulæ reperies in præſidio eſſe milites 2175, hi enim aucti tertia ſui parte, quæ eſt 725, fiunt 2900. Quod ſi numero ſic invento 2175, præter tertiam ſui partem addantur 100, quæ à 3000 ſupra abſtulimus, reſtituentur 3000, atque ita ſolutio obtinebitur quæſtionis datæ.

Quæſtio 5.

Antonius ætatem Caroli continet bis & adhuc 4 annos. Paulus utriuſque ætatem complectitur & inſuper annos 6. Omnes verò tres ſimul conficiunt 60 annos. Quot ergo ſinguli annos habent?

Neque hæc quæſtio per unicam poſitionem ſolvenda eſt. Ponatur enim Carolus habere an-

nos

nos 6: horum duplo ſi addam 4, habebo 16, annos Antonii. Horum verò anni juncti adjectis 6, dant 28 annos Pauli. Et tres ſimul conficient annos 50. In regula trium primus eſto 50, ſecundus 6 hypotheſis, tertius 60 datus. Ex his pro quæſito annorum Caroli proveniet A. Qui numerus non ſolvit quæſtionem; ſic enim Antonius haberet annos B: Paulus verò annos C; & tres ſimul conficient annos D: deberent autem 60.

A $7\frac{1}{5}$
B $14\frac{2}{5}$
C $21\frac{3}{5}$
D $43\frac{1}{5}$

Certum igitur eſt non eſſe hîc numerum inventum ad hypotheſim, ut datus eſt ad quæſitum: aliàs enim unicâ poſitione fuiſſet quæſtio per regulam trium ſoluta. Verum cum ſæpe non ita promptum ſit diſcernere, utrùm numerus ex poſitione inventus ſit ad poſitionem ſeu hypotheſim, ut datus ad quæſitum, aliud erit hujus rei indicium aſſignandum.

Ex quo indicio colligatur quæſtionem unicâ poſitione ſolvi non poſſe.

QUotieſcunque ut cum numero ad libitum poſito juxta quæſtionis tenorem procedatur, aſſumi debet numerus aliquis in quæſtione datus, certus eſto quæſtionem unicâ poſitione ſolvi non poſſe.

Exemplum ſumatur in quæſtione ultima ſuperiori, in qua pro annis Caroli poſitus eſt 6.

Ut jam cum hac hypotheſi procedatur juxta tenorem quæſtionis , aſſumi debent 4. ad duplicatos Caroli annos adjiciendi ut habeatur ætas Antonii ; qui numerus 4, quia datus eſt in quæſtione , ea ſolvi non poterit unicâ poſitione.

Quod univerſaliter ſic demonſtro. Hypotheſis , ſeu poſitio falſa ſit F : numerus verus qui quæritur , eſto V: numerus quiſpiam in quæſtione datus qui aſſumi debuit , ut cum falſa hypotheſi F, quæſtio decurri poſſet , ſit A. Numerus datus ſeu cognitus principalis , qui cum eodem A & vero quæſito V, tenore quæſtionis decurſo , producitur , eſto D. Manifeſtum eſt A non eſſe ad F, ut A eſt ad V, cum F & V ex hyp. ſint inæquales. Alius ergo X major minorve quam A, erit ad F, ut A eſt V. Procedendo igitur cum X & F, juxta quæſtionis tenorem producatur Z. Quoniam igitur X & A ipſis F & V ſunt proportionales , manifeſtum eſt, ſi juxta ejuſdem quæſtionis tenorem, tam cum X & F, quàm cum A & V procedatur , productos inde numeros Z & D fore ipſis F & V proportionales. Sit jam I ille numerus qui inventus eſt decurrendo, cum falſa poſitione F, tenorem quæſtionis, aſſumendo ad hoc datum illum numerum A. Quoniam igitur X & A, ut oſtendi ſupra, ſunt inæquales , etiam Z & I producti ſeu inventi ex decurſu quæſtionis , ille cum X & F, hic cum A & F, inæquales erunt, Quare cum ſupra demonſtratum ſit Z eſſe ad F. ut D eſt ad V, non erit I, inventus ex decurſa quæſtione cum falſa hypotheſi F, & uno ex datis A, ad hypotheſim F,

	F		V
	X	A	
Z	I		D

ut eſt datus numerus D, qui ſit decurrendo quæſtionem cum vero quæſito V & eodem dato A, eſt ad quæſitum V. Ejuſmodi ergo quæſtio non ſolvitur unâ poſitione. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Cum numerus ex poſitione inventus & in quæſtione datus ſunt ſimiles plani vel ſolidi, vel gradus altioris cujuſcunque, neque tum quartus proportionalis per regulam trium inventus erit is qui quæritur.

Diſponendi ſint 1875 *milites acie rectangulâ, ſic ut latus ſit triplo longius fronte. Quot in fronte diſponendi? quot in latere? Pone* 4 *in fronte. Ergo in latere erunt* 12; *qui numeri ducti in invicem conficiunt* 48. *deberent autem* 1875. *Sunt ergo* 48 *inventus &* 1875 *ſimiles plani, cum latera habeant ſimilia. Ergo eorum proportio per* 18. 8. *duplicata eſt proportionis laterum, quæ ſunt ipſa hypotheſis* 3. *& quæſitus. Igitur permutando, non eſt inventus* 48 *ex hypotheſi* 3, *ad hypotheſim* 3, *ut datus* 1875 *ad quæſitum. Ergo hæc quæſtio per hanc regulam ſolvi nequit. Eodem modo id ipſum oſtendam, cum inventus & datus ſunt ſimiles ſolidi, ut continget in hac quæſtione. Eſt murus qui continet* 13824 *pedes cubicos, longitudo ejus eſt decupla altitudinis, hæc verò quintupla ſpiſſitudinis. Quæritur longitudo, altitudo, ſpiſſitudo.*

Cæterum quæſtiones hujuſmodi aliis ſolvuntur viis, & facillimè per Algebram, cujus vis nullo quæſtionum genere limitatur.

CAPUT VI.

Regula duplicis poſitionis.

HÆc regula præcedenti multò univerſalior eſt : omnes enim quæſtiones, quæ per unam poſitionem ſolvi poſſunt ſolvuntur etiam per duas & præter has aliæ innumeræ quæ per unam non poſſunt.

Regula verò ſic habet. Pro quæſito numero pone quemvis numerum, qui dicetur hypotheſis, & cum eo procede juxta tenorem quæſtionis ; cui ſi non ſatisfaciat, errorem hypotheſi ſubſcribe. Ponatur deinde alius quicunque numerus, cum quo ſimiliter ratiocinare juxta quæſtionis ſententiam ; cui ſi non ſatisfaciat, errorem ſubſcribe hypotheſi ſuæ. Errores porro ſi exceſſu peccant, notentur ſigno +, defectu, ſigno --.

Ex duplici hac poſitione quæſitus numerus per regulam trium elicietur duobus modis.

Primus modus ex duplici errore eliciendi quæſitum.

IN regula trium primo loco ſtatuatur differentia errorum ſi ſimiles ii ſunt ; errorum ſumma, ſi diſſimiles; ſecundo loco differentia hypotheſium : tertio loco error alteruter.

Quartus proportionalis ex his tribus inventus, illi hypotheſi, ex qua error tertio regulæ trium loco aſſumptus profluxit, addendus eſt,

cum

cum aſſumptus eſt error deficiens ; ſubtrahendus, cum excedens : ut habeatur quæſitus.

Errores dicuntur ſimiles , cum vel uterque eſt per defectum , vel uterque per exceſſum ; diſſimiles , cum unus eſt per defectum , alter per exceſſum.

Notæ. 1. Expedit plerumque hypotheſes aſſumere quàm minimas, imo unitatem (ſi fieri poteſt) & binarium , ut quàm breviſſima ſit operatio. 2. Expediet item plerumque primam hypotheſim ſolâ unitate augere vel minuere ut habeatur hypotheſis altera, ſic enim regula trium abſolvetur ſolâ diviſione. 3. Aſſumendæ hypotheſes, quæ ſine fractionibus , quantum fieri poterit, juxta tenorem quæſtionis poſſint examinari. Quâ de cauſâ nonnunquam expediet duas notationes primas negligere.

Reliquum eſt ut exemplis præcepta declaremus.

Quæſtio 1.

Tres lucrati ſunt aureos 400. Lucrum ſecundi ſuperat lucrum primi aureis 12. lucrum verò tertii excedit lucrum ſecundi aureis 16. Quæritur lucrum ſingulorum.

Lucrum primi eſto aureus unus. Ergo ſecundi lucrum ſunt 13 aurei, tertii 29: quæ ſimul omnia conficiunt 43 aureos : debebant autem conficere 400. Error igitur per defectum eſt 357. Eſto rurſus lucrum primi, 2 aurei. Ergo ſecundi eſt 14, tertii 30, quæ ſimul effi-

Hyp. 1.	1. hyp.
err. -357.	-354 err.
2	
differ.	

hyp. 1.	2. hyp.
-357	-354

efficiunt 46. deberent autem 400. Erratum igitur eſt rurſum defectu 354. Quoniam igitur uterque error defectus eſt, ſic regulæ trium ordinandi

3	1	-357. err. pri,
Differ. err.	Differ. hyp.	
		-354. err. ſec.

erunt termini, ex tribus 3, 1, 357 elicitur quartus 119, addendus primæ hypotheſi, 1, ut fiat 120 numerus quæſitus; Ex tribus, 3, 1, 354, quartus prodit 118, qui additus ſecundæ hypotheſi 2, etiam dat 120 numerum quæſitum. Igitur primi lucrum ſunt aurei 120; quibus adde 12; fit lucrum ſecundi 132. Huic quoque ſi addas 16, fit 148 lucrum tertii qui tres numeri faciunt 400.

hyp. 1000	1001. hyp.
† 2640	†2643.

Aliter. Finge primi, lucrum eſſe 1000. Ergo ſecundi eſt 1012 & tertii 1028: quæ ſimul omnia faciunt 3040: deberent autem 400. Erratum eſt ergo exceſſu 2640. Finge rurſum primi lucrum eſſe 1001. Ergo ſecundi eſt 1013, tertii 1029: quæ tria ſimul efficiunt 3043. Deberent autem 400. Erratum eſt ergo rurſus exceſſu 2643. Quare cum uterque error ſit per exceſſum, regula trium ordinabitur, ut ſupra; ſed quartus proportionalis ab hypotheſi erit ſubducendus.

Ex

3 1. † 2640. err. pri-
ſ. errorum. Diff. hyp.
† 2643. err. ſec.

ribus 3. 1. 2640, elicitur quartus 880. ſub-
endus ab hypotheſi prima 1000. ut habeatur
ſitus 120. Ex tribus 3. 1. 2643, quartus pro-
881, qui ſubtractus ab hypotheſi ſecunda
1, exhibet rurſus quæſitum 120

. 1. 1000. hyp.
57 † 2640

Aliter. Finge primi lucrum eſſe unum, deprehendes ut ſupra errorem 357 per de-
um. Finge rurſus lucrum ſecundi eſſe 1000.
or deprehendetur 2640 per exceſſum. Quo-
n ergo diſſimiles errores ſunt, regula trium
rdinabitur.

997 999 -357. err. pri.
ma err. Differ. hyp.
† 2640. err. ſec.

ribus 2997. 999. 357 habetur quartus 119,
quod error fuerit per defectum, addendus
rimæ hypotheſi, 1, ut habeatur quæſitus
Ex tribus 2997, 999, 2640, invenitur quar-
80, qui quòd error fuerit per exceſſum, ſub-
ndus eſt ab hypotheſi ſecunda 1000, & pro-
dem quæſitus 120, qui ſupra.
oluimus in hujus primæ quæſtionis ſolutio-
mnes regulæ caſus exponere. Quod hic ſe-
ſemel ſufficiet.

Qua-

Quæſtio 2.

Ætas Antonii ætatem Caroli continet bis, & adhuc 4 annos, Paulus utriuſque ætatem complectitur, & annos adhuc 6. Omnes vero tres ſimul conficiunt annos 60. Quæ ætas eſt ſingulorum.

Hæc quæſtio eſt illa, quam cap. præced. huc rejecimus.

Ætas Caroli eſto annus 1. Ergo Antonii ætas eſt, 6: Pauli 13. & tres ſimul efficiunt 20. Deberent autem 60. Erratum eſt ergo defectu 40. Fingo rurſum annos Caroli eſſe 2, ergo Antonii ſunt 8. Pauli 16, & ſimul omnes efficiunt 26. Erratur igitur defectu 34. Sic ergo regula trium ordinabitur.

Hyp. 1.	2. hyp.
-40	-34.

6	1	-40
Err. diff.	Hyp. diff.	Error prim.

Ex qua proveniet quartus A addendus hypotheſi primæ, 1, ut fiat quæſitus B, ætas nempe Caroli.

A $6\frac{2}{3}$

B $7\frac{2}{3}$

Quæſtio 3.

Conficienda eſt certa pecuniæ ſumma. Si ſinguli conferrent 1 florenum, deficerent ad ſummam floreni 10. ſi duos ſinguli, redundarent itidem 10. Quanta eſt ſumma, & quot collatores?

Fingo collatores eſſe 100, qui ſinguli conferentes 1 florenum conficient 100 Flor. quæ ſum-

mma quia à ſummâ quæſitâ deficere debet flo-
s 10, ſumma quæſita eſſet 110. Si jam ſin-
ex collatoribus 100, conferant flor. 2, fient
; à quibus ſi aufers 10 fit ſumma 190, quæ
ret eſſe æqualis priori 110: ſed aberrat per
ſſum 80. Fingo rurſum collatores eſſe 101,
inguli conferentes 1 florenum conficiunt
mam 101, ac proinde
ma qnæſita eſſet 111. Hyp. 100. 101. hy.
od ſi conferrent ſingu- † 80 † 81
os florenos, confice-
202; à quibus ſi aufers 10, fit ſumma 192,
deberet æqualis eſſe ſummæ priori 111, ſed
rat exceſſu 81. Sic ergo regula trium ordi-
tur.

1	1	80
Diff. err.	Diff. hyp.	Err. pri.

uâ reperitur quartus 80, auferendus ab hy-
eſi prima 100. Quæſitus ergo collatorum
erus eſt 20, quibus ſi addas 10 fit ſumma
ſita 30 flor. Si enim viceni ſinguli conferant
ſumma 20 quæ deficit à 30 per 10. Si verò
li conferant 2, fit ſumma 40, quæ 30 exce-
er 10.

Quæſtio 4.

egius exercitus conſtat Hiſpanis, Belgis,
nanis. Germani ſunt 10,000. Belgæ conſi-
t tertiam partem Germanorum & Hiſpano-
: Hiſpani dimidiam Germanorum & Bel-
m. Quot ergo ſunt Belgæ? quot Hiſ-
?
no Belgas eſſe 4000. Ergo Germani & Hiſ-
ſunt 12000. Ergo quia Germani ſunt 10000
Hiſ-

Hyp.	Hyp.
4000	5000
-10000	-5000

Hiſpani erunt 2000; qui bis ſumpti deberent conficere Germanos & Belgas, nempe 14000, conficiunt autem tantum 4000. Erratum ergo eſt defectu 10000. Fingo rurſum Belgas eſſe 500. Ergo Germani & Hiſpani ſunt 15000. Et quia Germani ſunt 10000, Hiſpani erunt 5000, qui bis ſumpti conficiunt 10000, deberent autem conficere Germanos & Belgas nempe 15000. Erratum ergo eſt rurſum defectu 5000. Sic ergo regula trium ordinabitur.

5000.	1000.	-10000.
Diff. errorum.	Diff. hyp.	Error primus.

Quâ reperitur quartus 2000 addendus hypotheſi primæ 4000. Sunt igitur Belgæ 6000, Hiſpani 8000.

Quæſtio 5.

Si ex Regio equitatu ad hoſtilem transfugerent 900, æquales forent utrimque; ſi verò 900 ex hoſtili ad Regium transfugerent, eſſet Regius decuplo major hoſtili. Quæritur numerus utriuſque equitatus.

Fingo equitatum hoſtilem eſſe 2000. Si ex his transfugiant 900, ad regios, reſtabunt 1100, & his decuplo tum major erit equitatus regius, ac proinde 11,000. Unde ſi demam 900 transfugas, regius equitatus erit 10, 100. Si ex hoc transfugiant 900 ad hoſtilem, reſtarent ex Regiis 9200,

oo, & hoſtilis fieret 2900; exceditque tum
uc regius hoſtilem nu-
um 6300; debebat au-
æqualis eſſe. Erratum
igitur exceſſu 6300.
go deinde hoſtilem e-
atum eſſe 2001, & diſ-

hyp.	hyp.
2000	2001
† 6300	† 6309.

endo rurſum juxta tenorem quæſtionis, re-
o errari per exceſſum 6309. Sic igitur regu-
ium ordinabitur.

9	1	† 6300.
Diff. err.	Diff. hyp.	Err. primus.

x qua reperitur quartus 700, à prima hypo-
2000 auferendus quia error hypotheſeos
oer exceſſum, ut fiat 1300. Hoſtilis ergo
tatus eſt 1300, Regius 31000.

æc quæſtio ſic etiam proponi poterat. Si Pe-
Paulo ex ſuis nummis det 9, habebunt æquè
tos ambo; ſi verò Paulus ex ſuis det 9 Petro,
ecuplo habebit plures quam Paulus. Quot
nummos habuit Petrus? quot Paulus? re-
s Petrum habuiſſe 31: Paulum 13.

raus aurifabri, de qua egi ſub finem cap. 4.
n per hanc regulam reperitur hunc in modum.

Quæſtio 6.

orona ex auro & argento mixta ſit 20 libr.
iratur quantùm aurum in aqua fiat levius,
n in aëre. Fit proportione 18 ad 19. Hinc
regulam trium elicitur, maſſam auri 10.
n aqua leviorem fieri proportione. A ad 10.

In

Inquiratur deinde quâ proportione argentũ in aqua fiat levius: ea eſt 28 ad 31. Ex qua elicitur maſſam argenti 10 lib. leviorem fieri in aqua proportione B ad 10.

A $9\frac{9}{19}$ ad 10

A $9\frac{27}{589}$ ad 10

C $9\frac{25}{589}$ ad 10

B $9\frac{1}{31}$ ad 10

B $9\frac{19}{589}$ ad 10

Si jam corona 10 lib. ex auro & argento mixta imponatur aquæ, ea fiet levior proportione aliqua inter priores mediâ, ea ſit C ad 10. Quæritur quantum argenti ſit permiſtum.

Fingo admixtam eſſe libram 1, ergo auri ſunt in corona lib. 9. Jam ſi auri libræ 10 ſunt in aqua libræ A; ergo 9 libræ auri in aqua quot appendent libras? per regulam trium, reperio libras D. Rurſum ſi 10 lib. argenti in aqua ſunt lib. B; ergo 1 lib. argenti in corona, quid appendet in aqua? reperio E. Igitur D & E deberent conficere C pondus coronæ in aqua; conficiunt autem F. Erratum eſt igitur defectu G. Fingo deinde admixtas eſſe libras argenti

D $\frac{47952}{5890}$ E $\frac{5320}{5890}$

F $\frac{42632}{5890}$ G $\frac{10628}{5890}$

L $\frac{2}{589}$ ſeu $\frac{20}{5890}$

genti duas, & diſcurrendo ut ſupra, errorem re-
perio alterum L per exceſſum. Sic igitur regula
rium ordinabitur.

10648 / 5890	1:	2 / 589	N	11780 / 6271672
Summa err.	Diff. Hyp.	err. ſecund.		

Ex qua proveniet N quæſita argenti quantitas in mixto.

Alter modus ex duplici errore eliciendi quæſitum.

SI errores ſunt ſimiles ducatur prima hypotheſis in errorem ſecundæ, & hypotheſis ſecunda in errorem primæ, & productorum differentia dividatur per differentiam errorum. Quotiens erit numerus quæſitus.

Si errores ſunt diſſimiles, productorum ſumma dividatur per ſummam errorum.

Reſumatur quæſtio prima: in qua hypotheſes erant, 1 & 2, errores ſimiles -357 -354. Factâ multiplicatione alternâ, ſive in crucem, producta ſunt, 354. 714. quorum differentia 360 diviſa per errorum differentiam 3, dat 120 numerum quæſitum.

Pri.	Sec.		
1	2		
-357	-354.		
3		Producta	
Err. Diff.		354	714
		360	
		Diff.	

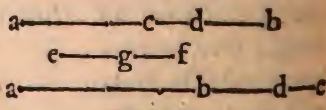
In eadem quæſtione aliæ erant hypotheſes 1000 & 1001, ex quibus errores provenerant ſimiles + 2640, & + 2643. Ex hypotheſium per errores alternâ multiplicatione producta ſunt 2643000, 2642640, quorum differentia 360 diviſa per 3 differentiam errorum, exhibet 120 quæſitum numerum.

Rurſus in eâdem quæſtione hypotheſes fuere 1 & 1000: ex quibus errores diſſimiles - 357 & + 2640. Ex his in alternos errores ductis producuntur 2640 & 357000; quorum jam ſumma (ſunt enim errores diſſimiles) 359640 diviſa per ſummam errorum 2997 exhibet quæſitum 120.

Prior modus ſimplicior eſt & plerumque expeditior.

De primi modi demonſtratione.

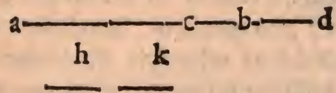
QUod ad primum modum attinet, nulla peculiari demonſtratione opus eſt, quandoquidem ſupponatur, ut quæſtio per hanc regulam ſolvi poſſit, uti differentia vel ſumma errorum eſt ad differentiam hypotheſium, ita eſſe errorem ad numerum, qui ſuæ hypotheſi addendus vel demendus eſt ad obtinendum quæſitum. Tantùm igitur proportionalitas illa erit nonnihil declaranda.



Quæſitum ſit AB: hypotheſis prima AC, & illius error EF: hypotheſis ſecunda AD, & hujus error EG. Sint autem primo hypotheſes vel ambæ ſimul minores quæſito,

ſito, vel ſimul ambæ majores, ut errores habeantur ſimiles. Si jam ſit ut errorum differentia G F ad hypotheſium differentiam DC, ita primus error E F ad C B, quod primæ hypotheſi A C ad quæſitum AB deeſt vel redundat; vel rurſum ſi ſit ut errorum differentia GF, ad hypotheſium differentiam DC, ita ſecundus error EG ad DB quod ſecundæ hypotheſi AD deeſt vel redundat ad quæſitum AB, quæſtio per hanc regulam ſolvi poterit; ſi tunc enim, (quod præſcribit regula) differentiæ errorum, differentiæ hypotheſium, & errori alterutri, quæratur quartus proportionalis, is illud erit, quod alterutri hypotheſi debet addi vel demi, ut habeatur quæſitum. Quod quidem per ſe eſt manifeſtum.

Eſto deinde hypotheſis prima AC minor quæſito AB, ejuſque error H per defectum; hypotheſis verò ſecunda AD major quæſito, ejuſque error K per exceſſum. Si jam ut ſumma errorum HK, eſt ad hypotheſium differentiam CD, ita ſit H error primus ad CB defectum primæ hypotheſeos AC à quæſito AB, vel ſecundus error K, ad BD exceſſum hypotheſeos ſecundæ AD ſupra quæſitum, ſolvetur quæſtio per hanc regulam; ſi enim (quod regula jubet) ſummæ errorum, differentiæ hypotheſium, & errori alterutri quæratur quartus proportionalis, is erit hypotheſeos à quæſito defectus vel exceſſus, ut per ſe patet.



Si porro quæras quando ſit errorum differen-

tia vel ſumma ad differentiam hypotheſium, ut error ad hypotheſeos ſuæ exceſſum defectumve à quæſito, ac proinde quæ ſub hanc regulam quæſtiones cadant, quæ non; reſpondeo, id ex ipsâ quæſtionum naturâ eſſe dijudicandum. De quo quidem quia multa dicere operæ pretium non eſt, è pluribus unum alterumve indicium adferam, obvium & facile.

Si ex duabus hypotheſibus plures habeantur errores quàm duo, quæſtio ſub hanc regulam non cadet. Talis eſt hæc: invenire numerum, quo diviſo per 2, 3, 4, 5, 6 reſtet ſemper unum, vel alii numeri dati, diviſo verò per 7 reſtet nihil.

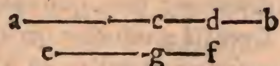
Si, cum uterque error eſt per defectum, error hypotheſeos majoris non ſit minor errore minoris, aut cum uterque error eſt per exceſſum, ſi error hypotheſeos majoris non ſit major errore minoris, ſcito rurſum quæſtionem non cadere ſub hanc regulam. Talis eſt quæſtio præcedens imo etiam hæc. Invenire numerum quo diviſo per 7, reſtent 3, diviſo per 9 reſtet nihil. Pono 27 pro quæſito: hunc metitur quidem 9, ſed 7 dividens relinquit 6; deberet autem relinquere 3. Error igitur eſt 3 per exceſſum. Pono deinde pro quæſito, 36 majorem prima hypothe. 18. Hunc 9 metitur, at 7 dividens relinquit 1; deberet autem ſolum 3. Error igitur etiam per exceſſum, & minor errore primo. Non cadit ergo quæſtio ſub hanc regulam.

Tandem ne nimiùm hic intricentur tyrones, generale indicium illis accommodatum iſtud eſto: Si ſemel cum duabus hypotheſibus ex præſcripto regulæ operatus quæſitum non obtineas,

neque per alias quaſcunque hypotheſes, quæſitum obtinebitur.

Modi ſecundi demonſtratio.

Caſus 1. Quæſitum eſto A B: hypotheſis prima AC, ſecunda AD, utraque quæſito minor; error primæ EF, ſecundæ EG. Productum ex hypotheſi prima A C in errorem ſecundum E G, dicatur A C in E G. Productum ex hypotheſi ſecunda AD in errorem primum EF, æquatur *a* his quatuor, AC in EG; AC in GF; CD in EG; CD in GF. Quia igitur AC in EG utrique producto commune eſt, erit



productorum differentia. Æ AC in GF, CD in EG, CD in GF) quæ X dicantur.

Dein AB in FG Æ *b* AC in GF, CD in GF, DB in GF) quæ dicantur Z. b 1. 2.

Jam quia ex ſuppoſitione GF differentia errorum eſt ad CD hypotheſium differentiam, ut error primus EF ad CB hypotheſeos primæ defectum à quæſito AB, etiam permutando erit GF ad EF, ut CD ad CB. Ergo & GF eſt ad EG ut CD ad DB. Ergo in aggregato Z, G F in DB, ſeu

V 3 DB

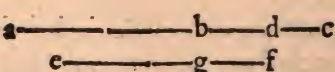
19.7. DB in GF, æquatur CD *e* in EG, in aggregato X. Quare cum reliqua utrimque communia ſint, erunt tota X & Z æqualia. Atqui jam oſtenſum eſt Z æquari AB in GF, X verò æquari differentiæ productorum. Ergo etiam AB in GF æquatur differentiæ productorum. Atqui AB in GF, diviſo per GF, quotiens eſt AB. Ergo etiam differentiâ productorum diviſâ per GF differentiam errorum, quotiens eſt AB, ipſum videlicet quæſitum. Quod erat demonſtrandum.

Caſus 2. Eſto jam hypotheſis utraque, A C, A D major quæſito A B. Productum ex hypotheſi prima AC in errorem ſecundæ EG, dicatur AC in EG.

AC in EG Æ { AB in EG, BD in EG, DC in EG } quæ dicantur P

Productum ex hypotheſi ſecunda AD in errorem primæ EF; dicatur AD in EF.

AD in EF Æ { AB in EG, AB in GF } { BD in EG, BD in GF } quæ dicantur Q

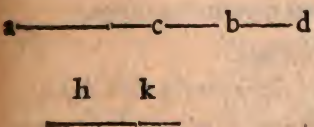


Nunc quia ex ſuppoſitione GF differentia errorum eſt ad DC differentiam hypotheſium, ut primus error EF ad BC exceſſum hypotheſeos primæ AC, ſupra quæſitum AB, (alias enim quæſtio

quæſtio per hanc regulam ſolvi non poſſet) etiam permutando erit GF ad EF, ut DC ad BC. Ergo etiam GF eſt ad EG, ut DC ad BD. Ergo GF in BD, ſeu BD in GF æquatur DC in EG. Quare ſi in aggregato Q pro BD in GF ſubſtituatur DC in EG, erit.

AD in EF Æ { AB in EG, AB in GF, BD in EG, DC in EG } quæ dicantur R

Quare ſi conferantur R & P, invenietur productorum differentia eſſe AB in GF. Atqui AB in GF diviſo per GF, quotiens eſt AB. Ergo differentiâ productorum diviſâ per GF errorum differentiam, quotiens eſt AB ipſum nempe quæſitum. Quod erat demonſtrandum.



Caſus 3. Sit denique prima hypotheſis AC minor quæſito AB; at ſecunda AD major. Productum ex hypotheſi primâ AC in errorem ſecundum K, dicatur AC in K. Productum ex AD hypotheſi ſecundâ in errorem primum H æquatur, AC in H; CB in H; BD in H. Ergo

Summa productorum. Æ { a AC in K, AC in H, CB in H, BD in H } quæ vocentur. S

a colliġ. ex 1. 2.

Dein AB in HK Æ AC in K, AC in H, CB in H, CB in K, quæ vocentur V

Vide etiam ſcemata pag. præc. Nunc quia per hypotheſim HK errorum ſumma eſt ad CD differentiam hypotheſium, ut H error primus eſt ad CB hypotheſeos primæ AC defectum à quæſito AB, erit etiam permutando, dividendo ac invertendo H ad K, ut CB ad BD.
o 19. 7. Ergo in S & V, BD in H, & CB in K *o* æqualia ſunt. Quare cum reliqua utrimque communia ſint, erunt tota S & V æqualia. Quare cum V ſit AB in HK,& S ſit ſumma productorum,etiam AB in HK ſummæ productorum æqualis erit.Atqui AB in HK diviſo per HK, quotiens eſt AB. Ergo etiam productorum ſummâ diviſâ per HK ſummam errorum, quotiens eſt AB, ipſum nempe quæſitum. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Quæſtio, quam negavi ſupra per regulam duplicis poſitionis ſolvi poſſe, celebratur ab arithmeticis, nec tamen ſolvitur ab ullo, quem legerim. Quare viſum eſt in gratiam ſtudioſorum illius ſolutionem hîc apponere.

Lemma.

Datum numerum A, ſæpius poſitum dividere per datum B, donec reſiduus ſit datus D.

D.	3.
A	B
9	7

Hoc ita fiet: primo A 9 diviſo per B 7: reſtat 2, quæ ſcribe ſupra primum 9, ac mente addito ad ſecundũ 9,

2.4.6.1. 3.
9.9.9.9.9. 45 C
7 7 7 7 7

ut fiat 11, divide 11 per 7: reſtabit 4: quæ ſcribe ſupra ſecundum 9, ac adde ad tertium 9 ut fiat 13, quæ rurſum divide per 7: reſtabit 6. Sic deinceps procedendo, reperies hîc ex quinta diviſione relinqui D. 3, numerum datum.

Eodem modo operaberis ſi dentur duo numeri dividendi A & X, quorum primus A tantùm ſemel, alter X ſæpius ponitur. In exemplo appoſito poſt quintam diviſionem relinquitur numerus datus D. 2.

A	X			D 2.
45.	65			
		B 5		
0	3	1	4	2
45.	63.	63.	63.	63.
5	5	5	5	5

Quod ſi contingat bis relinqui eundem numerum, diverſum à dato, quæſitum lemmatis erit impoſſibile. In primo exemplo in quo 9 ſæpius poſitus dividitur per 6, tam poſt primam quàm poſt tertiam diviſionem reſtat 3: liquet igitur continuatâ ulteriùs diviſione ſemper eadem fore reſidua 3.0.3. In ſecundo Exemplo in quo 9 & 8 ſæpius poſitus dividuntur per 6, tam poſt primam diviſionem quàm poſt quartam reſtat 3. Quare ſi continuetur diviſio, eadem ſemper recurrent reſidua 3.5.1: ac proinde ſi reſiduum quæſitum in lemmate ſit ab his diverſum, lemma erit impoſſibile. Ratio per ſe eſt manifeſta.

3	0	3	0	3
9	9	9	9	9
6	6	6	6	6

3	5	1	3	5	1	3
9	8	8	8	8	8	8
6	6	6	6			

PROBLEMA I.

INvenire numerum (K) quo diviſo per datos quoſcunque (A, B, C) ſint reſidua data (V, X, Z) diviſo autem per alium datum (D) reſtet nihil.

Inveniatur F. multiplex numeri D talis, ut eo diviſo per C, reſtet Z: quod fiet ſi D, toties ponatur ac dividatur per C, donec reſtet Z, ut expoſitum eſt in lemmate: F, enim tam multiplex eſt, ipſius D, quoties D. poſitus eſt.

Si jam F diviſo etiam per B, non etiam reſtat X, inveniatur per 36. 7, minimus, quem D & C metiuntur, qui ſit M: tum inveniatur numerus G, compoſitus ex F, & multiplo ipſius M talis, ut eo diviſo per B reſtet X. Id verò fiet, ſi primò ponatur F 45, ac deinde toties M 63, donec his per B diviſis reſtet X: G enim æquatur F & tam multiplo ipſius M quoties M poſitus eſt.

Quod ſi jam G etiam diviſo per A, non reſtet etiam V, quæratur per 38. 7. numerus N minimus quem tres D, C, B metiuntur: inveniatur deinde K compoſitus ex G & multiplo ipſius N talis, ut eo diviſo per A, reſiduus ſit V: hoc verò obtinebitur, ſi primò ponatur G 297, ac deinde toties N 315, donec his diviſis per A, reſtet V. K enim æquatur G & tam multiplo ipſius N, quoties N poſitus eſt.

Dico K eſſe quæſitum & quidem minimum.

ABCD

A B C D. N. 315 63 M
8. 5. 7. 9.
5 2 3 K G F
V X Z 1557. 297. 45.

2 4 6 1 3 0 3 1 4 2
9. 9. 9. 9. 9. 45 63 63 63 63
7 7 7 7 7 5 5 5 5 5

1 4 7 2 5
297. 315. 315. 315. 315
8 8 8 8 8.

Demonſt. *Ex conſtr. D metitur M, ac proinde &*
multiplum ipſius M. Metitur etiam D multiplum b [b] conſt.
ſuum F. Ergo D metitur G compoſitum ex F & mul-
tiplo ipſius M. Metitur autem D c *etiam N, adeoque* [c] conſt.
& multiplum ejus. Ergo D metitur K compoſitum d [d] conſt.
ex G & multiplo ipſius N. Quod erat è quæſitis pri-
mum.

Deinde C dividens F e *relinquit Z. Atqui C* f *me-* [e] conſt.
titur M, adeoque & multiplum ejus. Ergo C divi- [f] conſt.
dens G compoſitum g *ex multiplo ipſius M, & ex F,* [g] conſt.
etiam relinquit Z. Rurſum C metitur N, adeoque &
ejus multiplum. Ergo C dividens K compoſitum ex
multiplo h *ipſius N, & ex G, etiam relinquit Z. Quod* [h] conſt.
erat ſecundum.

Rurſus per conſtr. B. dividens G relinquit X. Atqui
B metitur n *N, adeoque & ejus multiplum. Ergo B di-* [n] conſt.
videns K compoſitum i *ex multiplo ipſius N & ex G,* [i] conſt.
relinquet X. Quod erat tertium.

Denique per conſtruct. A dividens K relinquit V. Quod erat poſtremum. Quæſitus igitur numerus eſt K. Quod verò etiam minimus ſit, ex conſtructione patet,

ſumpſi-

ſumpſimus enim M, minimum quem metiuntur D, C, & N minimum quem metiuntur D, C, B.

Determinatio problematis patet ex lemmate.

PROBLEMA 2.

Iiſdem poſitis, numerum, qui problemati ſatisfaciat ſecundum & tertium & omnes ex ordine reliquos infinitos reperire.

a 38. 7. *Vide etiam ſcema pag. præc.* *Inveniatur* O *minimus, a quem omnes diviſores dati A, B, C, D metiuntur. Hic* (O) *additus primo* K *ſuperiùs invento, dabit ſecundum* K † O; *additus verò ſecundo, dabit tertium* K † 2 O *Et ſic deinceps.*

Demonſt. *Quoniam A per conſtr. metitur* O, *& per præced. dividens K relinquit V, etiam A metiens* K†O *relinquit V. Rurſum quia B metitur* c O, *dividens verò* d K *relinquit X, etiam B dividens* K†O *relinquit X. Pari modo oſtendam, ſi C dividat* K†O, *relinqui Z. Denique quia D metitur* O *ex conſt. & K. per præced. metietur etiam* K†O. *Ergo* K†O *ex iis eſt, qui problemati ſatisfaciunt; & quidem ſecundus, quod ex K primo, & ex* O *omnium diviſorum A, B, C, D minimo dividuo ſit procreatus.*

K K†O K†2O
1557
O

c conſt.
d præc.

Eodem modo demonſtrabitur tertius eſſe K†2O *& ſic deinceps in infinitum.*

PRO-

PROBLEMA 3.

SI numerus quæratur, quo diviſo per quotcunque datos (A,B,C) reſiduus ſit ſemper idem numerus (V) diviſo autem per alium datum D, reſtet, nihil, brevior erit operatio hunc in modum.

A	B	C	D
8.	4.	7.	6.

Q	R		4	0
56.	114.	2.	56.	56.
			6.	6.

V
2

Inveniatur a *minimus Q, quem A, B, C metiuntur. Tum inveniatur R compoſitus ex V, & multiplo ipſius Q, talis ut eo diviſo per D nihil remaneat; quod obtinebitur ſi primò ponatur V 2, ac dein toties Q 56, donec his diviſis per D, nihil ſuperſit. Q enim toties acceptus, quoties poſitus fuit, unà cum V, dabit R.* a 38. 7.

Dico R eſſe quæſitum.

Demonſt. *Quoniam A, B, C, metiuntur* b *Q, metientur etiam multiplum ipſius Q. Ergo A, B, C, dividentes R compoſitum ex multiplo ipſius Q, & ex V, relinquunt V, D autem dividens R, nihil* c *relinquit. Ergo R eſt quæſitus.* b conſt. c conſt.

Secundus, tertius, quartus & reliqui omnes ſine termino qui problemati ſatisfaciunt, *reperientur ut probl. 2.*

ARITHMETICÆ PRACTICÆ.

LIBER V.

DE PROGRESSIONIBUS.

QUintum hunc & poſtremum Arithmeticæ librum progreſſionibus dare viſum eſt. Eas alii obiter ferè tantùm & quaſi appendicis inſtar tractare ſolent. Sunt tamen ejuſmodi, ſive theoriam ſpectes, ſive praxim, ut contemplationem longiorem accuratioremque mereantur.

DE PROGRESSIONE ARITHMETICA

CAPUT I.

Progreſſionis Arithmeticæ affectiones.

PRogreſſio arithmetica eſt ſeries numerorum ſe mutuò æquali exceſſu ſuperantium. Primus ſeriei terminus poteſt eſſe quicunque; ex-

ceſſus

ceſſus quoque terminorum quilibet eſſe poteſt; etiam æqualis primo termino.

1	2	3	4	5	6	7	8	9.	&c.
1	3	5	7	9	11	13	15	17.	&c.
3	6	9	12	15	18	21	24	27.	&c.

THEOREMA 1.

a	b	c	d	e	f	g	h	k
5	8	11	14	17	20	23	26	29

exceſ. x.
3.

Quilibet terminus (f) *progreſsionis arithmeticæ, continet primum, hoc eſt minimum terminum* (a) *& toties communem exceſſum* (x) *quot poſt primum uſque ad ipſum* (f) *incluſivè, ſunt termini.*

Patet ex definitione progreſſionis arithmeticæ.

Corollar. Habetur igitur maximus terminus, ſi exceſſus ducatur in numerum terminorum unitate mulctatum, & producto addatur minimus.

THEOREMA 2.

In progreſſione arithmetica ſumma duorum quorumlibet terminorum (c, g) *æquatur ſummæ quorumlibet duorum ab ipſis æqualiter diſtantium* (a, k.)

Demonſt. Quoniam *k* ſuperat *h* exceſſu *x*, eo-

dem

dem, quo *b* ſuperat *a*, ſi *k* det ſuum *x* ipſi *a*, patet *k* futurum æquale ipſi *b*, & *a* ipſi *b*. Igitur *a* cum *k* æquatur *b* cum *h*. Eodem modo oſtendam *b* cum *h* æquari *c* cum *g*. Ergo *a* cum *k*, æquatur *c* cum *o*. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 3.

PRogreſsionis Arithmeticæ terminus quicumque dimidius eſt ſummæ duorum à ſe æqualiter diſtantium,

a	b	c	d	e	f	g	h	k
5	8	11	14	(17)	20	23.	26.	29

exceſ. x
3

Demonſtr. Accipiatur terminus *e* quilibet. Quoniam tam *f* ipſum *e*, quam *e* ipſum *d* excedunt exceſſu *x*; manifeſtum eſt ſi *f* ſuum *x* det ipſi *d*, omnes tres *f, e, d* fore æquales. Ex quo patet *e* dimidium eſſe ſummæ duorum *d, f*. Atqui per theor. præced. ſumma *d, f* æquatur ſummæ *e, g*, & ſummæ *b, h*, & alteri cuilibet ſummæ duorum æqualiter utrimque ab *d* & *f* diſtantium. Ergo etiam *e* dimidius eſt ſummæ duorum à ſe æqualiter diſtantium. Quod erat demonſt.

THEOREMA 4.

IN qualibet progreſsione arithmetica, omnium terminorum ſumma habetur. 1. *ſi ſumma minimi & maximi termini ducatur in numerum*

merum terminorum, & productum per 2 dividatur:

Vel 2. ſi ſumma minimi & maximi ducatur in ſemiſſem numeri terminorum:

Vel 3. ſi ſemiſſis ſummæ minimi & maximi ducatur in numerum terminorum.

a b c d e f g h

Demonſt. ſit primo numerus terminorum par. Summæ binariæ *a*, *h*; & *b*, *g*, & *c*, *f*; & *d*, *e*, ſunt inter ſe æquales per th. 2: earum autem numerus æqualis eſt dimidio numero terminorum. Ergo una ex his ſummis binariis, puta *a*, *h* ducta in dimidium numerum terminorum æquabitur omnium terminorum ſummæ: (quod erat ſecundùm;) ac proinde ducta in totum numerum terminorum erit ſummæ omnium dupla. Ex quo patet primum & ex illo tertium.

Eſto deinde numerus terminorum impar, ut in ſcemate theor. 3. Cum ſummæ omnes binariæ *a*, *k*, & *b*, *h*; & *c g*; & *d*, *f*, ſint inter ſe æquales per th. 2; patet ex diſcurſu præcedenti unam ex his puta, *a*, *k* ductam in numerum terminorum *a*, *b*, *c*, *d*, *f*, *g*, *h*, *k*, (qui in hoc exemplo, medium *e* omittendo, eſt 8.) duplam fore eorundem terminorum. Atqui ſumma *a*, *k* dupla eſt medii *e* per th. 3. Ergo ſumma *a*, *k*, ducta in totum terminorum numerum (9) qui jam propter medium aſſumptum eſt priori (8) unitate major, dupla eſt omnium terminorum: ex quo patet primum; ex illo autem facilè patebunt, 2. & 3.

THEOREMA 5.

CUm numerus terminorum eſt impar, medius in numerum terminorum ductus exhibet ſummam omnium terminorum.

a	b	c	d	(e)	f	g	h	k
2	7	12	17	(22)	27	32	37	42.

Demonſt. Medius *e* dimidius eſt ſummæ extremorum *a*, *k* per th. 3. Atqui ſumma extremorum *a*, *k* ducta in numerum terminorum, per th. 4. dupla eſt ſummæ omnium. Ergo medius *e*, ductus in numerum terminorum æqualis eſt omnium ſummæ. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 6.

IN progreſſione naturali numerorum 1, 2, 3, 5, *&c. ſi ultimus* (8) *ducatur in numerum proximè majorem* (9:) *producti* (72) *ſemiſſis eſt ſumma omnium.*

1 2 3 4 5 6 7 8.

Demonſtr. Numerus ultimo proximè major, quia tantum unitate major eſt æquatur ſummæ ultimi & primi qui eſt unitas. Deinde numerus ultimus in progreſſione naturali, eſt ipſe terminorum numerus. Ducendo igitur ultimum in pro-

proximè majorem, duco ſummam primi & ultimi in numerum terminorum. Atqui ſic producitur duplum ſummæ omnium per th. 3. Ergo etiam cum ultimus in proximè majorem ducitur, duplum producitur ſummæ omnium. Producti ergo ſemiſſis eſt omnium ſumma. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 7.

IN progreſſione naturali imparium 1, 3, 5. 7, *&c. ſumma tota æqualis eſt quadrato numeri terminorum.*

a										l
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21

exceſ. 2.

Demonſt. Per theor. 4. hæc ſumma tota æqualis eſt producto ex dimidio ſummæ extremorum *a* & *l* in numerum terminorum. Atqui dimidia ſumma extremorum *a*, *l* eſt par numero terminorum, adeoque productum illud eſt quadratus numeri terminorum. Ergo ſumma tota æqualis eſt quadrato numeri terminorum.

Quod autem ſemiſſis ſummæ extremorum *a*, *l*, ſit par numero terminorum ſic oſtendo: per th. 1. *l* continet *a* unitatem, & toties exceſſum communem 2, quot ſunt termini dempto uno. Ergo ſi ad *l* adjiciatur *a* nempe unitas adhuc ſemel, continebit ſumma *a*, *l* toties 2, quot ſunt termini, ac proinde dupla eſt numeri terminorum. Ergo ſemiſſis ſummæ *a*, *l* numero terminorum æqualis eſt.

THEOREMA 8.

IN progreſsione naturali numerorum parium 2, 4, 6, 8, 10, &c. omnium ſumma æqualis eſt numero terminorum ducto in numerum unitate majorem.

Exceſ. 2.

a									k
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20.

Demonſt. Per 4. th. hæc tota ſumma æquatur ſemiſſi ſummæ extremorum *a*, *k* ductæ in numerum terminorum. Atqui ſemiſſis ſummæ *a*, *k* eſt unitate major numero terminorum. Ergo tota ſumma æquatur numero terminorum ducto in numerum unitate majorem.

Quod verò ſemiſſis ſummæ *a*, *k* ſit unitate major numero terminorum, ſic demonſtro. Quia hic exceſſus communis eſt ipſe primus terminus *a*, manifeſtum ex th. 1. *k* toties continere *a* nempe 2. quot ſunt termini, ac proinde duplum eſſe numeri terminorum. Ergo ſumma ipſorum *a*, *k* excedet duplum numeri terminorum exceſſu *a*. Ergo ſemiſſis ſummæ *a*, *k* excedet numerum terminorum dimidio ipſius *a* hoc eſt unitate.

THEOREMA 9.

CUjuſcumque progreſsionis arithmeticæ numerus terminorum habetur, ſi à ma-

ximo

ximo dematur minimus, & reſiduum per communem exceſſum dividatur, additâ quotienti unitate.

Demonſtratio patet ex Theor. 1.

CAPUT II.

Progreſſionis arithmeticæ Problemata.

PROBLEMA I.

Progreſsionem arithmeticam continuare uno termino & exceſſu datis.

a	b	c	d
1	4	7	10

Exceſ. 3.
x

Continuabitur aſcendendo ſi exceſſus *x* termino dato *a* addatur, ut fiat *b*, & ad *b* rurſus *x* ut fiat *c* & ſic deinceps. Continuabis verò deſcendendo ſi à termino dato, puta *d*, demas exceſſum *x*, ut fiat *c*; & ab *c* rurſus auferas *x*, ut fiat *b* & ſic deinceps.

PROBLEMA II.

Minimo termino, exceſſu, & terminorum numero datis, invenire maximum.

Exceſſum duc in numerum terminorum unitate mulctatum, & productum adde minimo

termino, ſumma dabit maximum. Patet ex theo. 1. & corollario.

PROBLEMA III.

Minimo termino, exceſſu & numero terminorum datis invenire ſummam progreſſionis.

Per probl. 1. inveni maximum, ſi datus non ſit. Deinde ſummam extremorum (id eſt minimi & maximi) duc in numerum terminorum. Producti ſemiſſis eſt ſumma.

Patet ex theor. 4.

Aliter. Si ſumma extremorum par eſt, ejus ſemiſſis ducta in numerum terminorum dabit ſummam totam.

Aliter. Si numerus terminorum par eſt, ſumma extremorum ducta in ſemiſſem numeri terminorum dabit ſummam totam.

Utrumque patet ex 4. theor. *Cùm aut ſumma extremorum, aut numerus terminorum impar eſt, proveniet quidem ſumma, ſed ut fractiones declinentur, præſtat tum uti modo primo.*

Aliter. Cùm numerus terminorum impar eſt, medius in numerum terminorum ductus ſummam totam exhibebit.

Patet ex theor. 5.

Hi tres modi ſunt univerſales, & primus inſuper à fractionibus liber eſt. Alii tres particulares habentur ex theor. 7. 8. 9.

PRO-

PROBLEMA IV.

Maximo termino, exceſſu, & numero terminorum datis, invenire minimum.

Ducatur exceſſus in numerum terminorum unitate mulctatum, & productum aufer à maximo. Relinquetur minimus.

Patet ex theor. 1. & corol.

Etiam independenter vel ab exceſſu vel à numero terminorum reperietur minimus, ſi maximus per numerum terminorum unitate mulctatum, vel per exceſſum dividatur: reſiduus enim erit minimus: ut patet ex eodem theoremate.

PROBLEMA V.

Datis maximo ac minimo terminis, & numero terminorum invenire exceſſum.

Minimum aufer à maximo. Reſiduum divide per numerum terminorum unitate mulctatum. Quotiens erit exceſſus.

Patet ex theor. 1. ac corol.

Etiam independenter à minimo reperietur exceſſus, ſi maximus dividatur quantum poteſt per numerum terminorum unitate mulctatum; quotiens enim erit ipſe exceſſus; ut patet ex eodem theor. Reſiduum vero diviſionis erit minimus.

PROBLEMA VI.

MInimo, maximo, & exceſſu datis invenire numerum terminorum.

A maximo aufer minimum, & reſiduum divide per exceſſum. Quotiens unitate auctus erit numerus terminorum.

Patet ex. 1. theor. & corol.

Etiam independenter à minimo reperietur terminorum numerus, ſi maximus per exceſſum dividatur quantum poteſt. Quotiens enim unitate auctus rurſus erit numerus terminorum ut patet ex eodem theor. Reſiduum verò ex diviſione erit minimus.

PROBLEMA VII.

NUmero terminorum, exceſſu & progreſſionis ſummâ datis invenire minimum & maximum.

Summa progreſſionis, *d*, dividatur per *e* numerum terminorũ Quotiens *f* erit ſemiſſis ſum-

a		b	
3 7 11 15 19 23			
exc. 4. ſum. 78.			num. term. 6.
c		d	e
quoti. (13. f			
20. k			
		26. n	

mæ

mæ extremorum *a*, *b*, per theor. 4. Duplicetur *f* & fiat *n*: erit *n* ſumma extremorum.

Deinde numerus terminorum *e* unitate mulctatus ductus in exceſſum *c*, ſit *k*. Erit *k* extremus dempto minimo, ut patet ex corol. theor. 1.

Si auferatur igitur *k*, ab *n*: reſiduum erit, duplum minimi. Semiſſis ergo reſidui erit minimus, eoque adjecto ad *k*, qui erat maximus dempto minimo, proveniet maximus.

Si non k *auferas à duplo f, ſed ſemiſſem ipſius* k *à ſimplo* f, *reſiduum erit minimus quæſitus.*

PROBLEMA VIII.

Dato minimo (a) *exceſſu* (c) *& ſummâ progreſſionis* (b) *invenire numerum terminorum, & maximum terminum.*

a					
3	7	11	15	19	23
		c			b.
	exc. 4		Sum.		70.

Quia duplum minimi *a* poteſt eſſe majus vel minus exceſſu *c*, hinc gemina problematis ſolutio eſt.

Eſto primum duplum minimi (*a*) majus exceſſu *c*. A duplo minimi aufer exceſſum (*c*.) Reſiduum (hoc eſt differentiam) divide per exceſſum (*c*.) Quadratum ex ſemiſſe quotientis adde duplo ſummæ progreſſionis (*b*.) diviſo per exceſſum *c*. Ex hac novâ ſummâ extrahe radicem quadratam: à qua aufer ſemiſſem quotientis. Quod reſtabit, erit numerus terminorum quæſitus.

Eſto deinde duplum mi-	a					
nimi (*a*) minus exceſſu (*c*.)	2	7	12	17	22	27
Duplum minimi aufer ab		c				b
exceſſu (*c*.) Reſiduum (hoc		exc. 5			ſum.	87.
eſt differentiam) divide						

per exceſſum (*c*.) Quadratum ex ſemiſſe quotientis adde duplo ſummæ progreſſionis (*b*:) Ex hac novâ ſummâ elice radicem quadratam; cui ſi addatur ſemiſſis quotientis, proveniet numerus quæſitus terminorum.

Invento numero terminorum habetur maximus per probl. 2.

$$yy \text{Æ} \frac{2b.}{c} \quad \frac{2a+c}{c}\, y$$

P R O B L E M A IX.

D*ata ſit progreſſio arithmetica* a, b, c *&c. cujus exceſſus* k, *& numerus quicunque* n. *Progreſſionem per tot terminos continuare, ut ejus ſumma par ſit numero dato* n *in multitudinem terminorum ducto.*

Quoniam duplum mi-	min.	a	3.
nimi *a* poteſt eſſe majus	exceſ.	k	2.
vel minus exceſſu *k*, du-	mult.	y	8.
plex habetur ſolutio pro-	num. datus	n	10
blematis.			

Si duplum minimi majus eſt exceſſu *k*, ex duplo dati *n* aufer differentiam inter duplum minimi *a* & exceſſum. Reſiduum divide per exceſſum *k*. Quotiens eſt multitudo terminorum quæſita.

Si

Si minimi *a* duplum eſt minus exceſſu *k*; du-
plo dati *n* adde differentiam inter duplum mi-
nimi *a* & exceſſum *k*: ſummam divide per ex-
ceſſum *k*. Quotiens eſt multitudo terminorum
quæſita.

Determinatio patet ex conſtr.

$$y. \text{Æ} \frac{2n - 2a + k}{k}$$

PROBLEMA X.

Datur (a) *minimus terminus progreſſionis arithmeticæ, & multitudo terminorum* (b) *quæ ducta in alium datum numerum* (m) *æquatur ſummæ progreſſionis. Quæritur ipſa progreſſio.*

A duplo numeri dati (*m*) aufer duplum minimi termini (*a*.) Reliquum divide per multitudinem terminorum unitate mulctatam. Quotiens erit	mini.	a
	mult.	b
	num. datus	m
	exceſ.	y

exceſſus ſecundi termini ſupra primum; quo invento habentur ſinguli termini progreſſionis per probl. 1.

$$y \text{ Æ } \frac{2m - 2a}{b - 1}$$

Cum tria hæc poſtrema problemata ſolverim per Algebram, & per eandem facillimè demonſtrentur, non putavi operæ pretium eſſe iis viâ ſyntheticâ, hoc eſt ordinariâ, demonſtrandis hic immorari.

CAPUT III.

Quæſtiones circa Progreſſiones Arithmeticas.

REliquum eſt ut ex allatis jam problematis nonnulla ad materiam certam traducamus per quæſtiones aliquot ſequentes.

Quæſtio 1.

Conſcripti ſunt milites per dies 30. Primo die adſcripti ſunt 300. Diebus ſequentibus affluxere ſemper totidem, quot die præcedenti, & adhuc 10 ampliùs. Quot ergo univerſim ſunt conſcripti?

Solvendo problema 3. reperies conſcriptos eſſe 13350. *Similis erit quæſtio ſequens.*

Quidam cum operario, illius ſtimulaturus induſtriam, ita convenit: primo die lucraberis 30 aſſes, ſecundo totidem, & ſi ſatisfeceris, adhuc tres ſuperaddam, atque ita quolibet die tantum lucraberis quantum præcedenti, & aſſes inſuper tres. Hac lege 20 dies operi ſunt impenſi. Quæritur ſumma ſtipendii.

Solvendum eſt denuò problema 3. Ex quo reperies aſſes 1100 id eſt florenos 55.

Quæſtio 2.

Artifex ex pacto, die primo lucratus eſt 40 aſſes poſtremo 90; quolibet autem die tantum, quantum præcedenti, cum auctario ſemper 5 aſſium.

n. Quot ergo dies operi impendit? & quan-
a lucratus eſt?
ſolve problema 6. reperies dies 11. Tum ſolve
blema 3. & ſumma lucri proveniet, aſſes 715.

Quæſtio 3.

ẋx pacto lucratus eſt artifex die primo tres
dos. Deinceps autem tantum die quolibet,
ntum præcedenti cum auctario ſemper ſoli-
um 4. Lucri ſumma fuit 78 ſolidi. Quærun-
dies operi impenſi.
ſolvendo problema 8. reperies dies 6.

Quæſtio 4.

)uo æqualem ſummam nummorum expende-
t,in pauperes: unus quotidiè diſtribuit num-
10, alter verò die primo tres nummos; dein-
autem tantum die quolibet quantum præce-
ti, duobus ſemper adjectis. Quæritur nume-
dierum huic diſtributioni impenſus, & ipſa
ma.
olvendo problema 9 reperies 8 dies quibus
uli expenderunt 80 nummos.

Quæſtio 5.

)uo expenderunt in pauperes ſpacio dierum 4,
alem ſummam nummorum: unus quotidiè
ribuit nummos 7: alter primo die unum;
ceps autem tantum die quolibet quantum
edenti adjecto tamen ſemper adhuc aliquo
morum numero ſuper eodem. Quantum
dedit quotidie? & quanta eſt ſumma tota?
olve problema 10. Reperies eum qui primo
expendit nummum unum, ſecundo die ex-
diſſe 5, tertio 9, quarto 13, & ſummam to-
28.

De

De progreſſione geometrica tum finitâ tum infinitâ.

PRogreſſio geometrica eſt ſeries numerorum ſeſe mutuo eâdem proportione excedentium, ſive eſt quælibet proportio per plures terminos, quàm duos, continuata. Si proportio continuatur per terminos creſcentes dicetur progreſſio aſcendens; deſcendens verò ſi per decreſcentes. Porrò cum progreſſio quælibet geometrica vel finita eſſe poſſit, vel infinita ſeu indefinita (hoc eſt, continuari per terminos multitudine finitos vel infinitos) de hac librum prorſus inſignem ſcripſit Gregorius à S. Vincentio; de illâ ſolâ Arithmetici meminere: quod ſanè miror, quando (ut oſtendi ad prop. 35. l. 9. & ex dicendis hoc capite planum fiet) facillimus ſit à finitâ ad infinitam tranſitus.

De utraque igitur acturus hic ſum, oſtendamque (quod ab aliis hactenus animadverſum non reperio) progreſſionis infinitæ myſterium omne in progreſſione finita, Arithmeticis jam pridem notâ, latere. Quod priuſquam aggredior, neceſſaria quædam præmitto.

a. 35 $\left(2\frac{2}{3}\right.$X
b. 15

$\left(\frac{7}{3}\right.$Z Uni.

1. Denominator (X) proportionis, numericæ ſcilicet ſeu rationalis (*a* ad *b*) eſt numerus ita ſe habens ad unitatem, ut major terminus (*a*) ad minorem (*b*.) Reperitur, ſi major (*a*) dividatur per minorem (*b*.) Quotiens enim (X) eſt denominator quæſitus. Nam quotiens omnis ita

eſt

eſt ad unitatem, ut diviſus (*a*) ad diviſorem (*b*.) Quando quotienti adhæret fractio, ea ad minimos terminos eſt revocanda: Imo, ut uſui denominator ſit, integer ad fractionem ſibi adherentem revocandus eſt, ut vides in Z.

2. Si denominator eſt numerus integer (quod tum accidit, cùm minor numerus majorem metitur) unitas & denominator ſunt minimi termini ad quos proportio data reduci poteſt.

3. Si denominator eſt integer (*c*) cum fracto, (quod tum eveniet, cùm minor proportionis terminus (*a*) majorem (*b*) non metitur) tunc minimi termini, quibus data proportio (*a* ad *b*) exprimi poteſt, ſunt duo numeri, ac proinde minimos proportionis terminos non ingreditur unitas. *Quod ſic*

$$a\ 35\ \Big(\ c.\ 2\ \frac{2\ d}{3\ e}\ \frac{8\ f}{3\ e}$$

$$b\ 15\ \ \text{Uni.}$$

$$2\ c\ \frac{o}{n}\ \frac{m}{n}$$

Demonſtro. Fractus integro *c* adhærens ſi in minimis terminis non ſit, ad minimos redigatur per prob. 1. c. 3. l. 2, & ſit *d e*. Ducatur deinde *e* in *c*, & genito adde *d*, ut fiat *f*, cui ſubſcribe *e*. Erit fractus *f e* par integro *c* cum fracto *d e* ut tradidi cap. 4. l. 2: & ſi *e* dividat *f* reſtituetur *c d e*. Per th. 1. c. 2. l. 2. *f* eſt ad *e*, ut fractio *f e* eſt ad unitatem; hoc eſt ut denominator *c*, *d e* eſt ad unitatem; hoc eſt ut *a* eſt ad *b*. Expreſſa igitur eſt ratio *a* ad *b* numeris *f*, & *e*: neque poſſe minoribus jam oſtendam. Exprimatur, ſi fieri poteſt minoribus *m*, & *n*. Quoniam igitur *m* eſt ad *n* ut *a* ad *b*, hoc eſt ut *f* ad *e*, manifeſtum eſt *m* diviſo per *n* eundem provenire quotientem, qui ex *f* diviſo per *e* in-

integrum nempe *c*, atque inſuper fractum *on* parem fracto *d e*. Unde per theor. 2. c. 2. l. 2. *o* eſt ad *n* ut *d*, ad *e*. Atqui volebas *n* minorem eſſe quam *e*, ergo etiam *o* minor eſt quam *d*. Quod eſt abſurdum, cum fractio *d e* in minimis terminis ponatur exiſtere. Minimi igitur termini quibus ratio *a* ad *b* exprimi poteſt ſunt duo numeri, *f*, & *e*. Quod erat demonſt.

CAPUT IV.

Progreſſionis geometricæ finitæ & infinitæ affectiones.

THEOREMA I.

PRoportio *qualibet (*a *ad* b*) continuatur aſcendendo, ſi denominator (*z*) multiplicet terminum majorem (* b; *) deſcendendo, ſi denominator* z *dividat terminum minorem (*a.*)*

Demonſt. Z multiplicans *b* gignat *m*. Ut *i* eſt ad denominatorem *z*, ita *a* eſt ad *b*. Atqui ex definitione multiplicationis, etiam ut *i* eſt ad *z*.

Uni. $\frac{3}{2}$ Z.

h	g	f	a	b	m	n	o
$\frac{32}{9}$	$\frac{16}{3}$	8.	12.	18.	27.	$\frac{81}{2}$	$\frac{243}{4}$.

ita

ita multiplicatus *b* ad productum *m*. Ergo ut *a* eſt ad *b*, ita *b* eſt ad *m*. Quod erat primum. Deinde *z* dividens *a* gignat quotientem *f*. Per definitionem diviſionis diviſus *a* eſt ad diviſorem *z*, ut quotiens *f* eſt ad *i*. Ergo permut. diviſus *a* eſt ad *f* ut diviſor *z* ad *i*. Atqui etiam eſt ut *z* ad 1 ita *b* ad *a*, cum *z* ſit denominator rationis *b* ad *a*. Ergo *b* eſt ad *a* ut *a* ad *f*. Quod erat alterum.

THEOREMA 2.

Omnis proportio tam aſcendendo quàm deſcendendo continuari poteſt per terminos infinitos.

Demonſtr. Data ſit ratio quævis *a* ad *b*, cujus denominator *z*. Poteſt major terminus multiplicari per denominatorem, & productum *m* rurſus per *z*, & ſic in infinitum. Atqui per th. 1. ſic ratio data continuatur aſcendendo. Ergo &c. Pari ratione poteſt minor terminus *a* dividi per denominatorem *z*, & quotiens *f* rurſum dividi per *z*, atque ita in infinitum. Sed per th. 1, ita continuatur ratio data deſcendendo. Ergo &c. *Termini tamen non erunt ſemper integri numeri. Ut patebit ex theor.* 4. *Vide Scema prae.*

THEOREMA 3.

Omnis proportio multiplex aſcendendo continuari poteſt per infinitos numeros integros; deſcendendo tamen non ſemper uſque ad unitatem.

h g f a b m n o.
1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 138. Den. 2.

Dem. 1. *Pars.* Cujuſcunque rationis multiplicis minor terminus *a* metitur majorem *b*, ac proinde ejus denominator eſt numerus integer, qui multiplicans *b* producit tertium terminum integrum *m*, & multiplicans *m*, producit quartum integrum *n*. Et ſic in infinitum.

m. l. k. a b. p. q.
$\frac{3}{2}$. 3 6 12 24 48 96 Den. 2.

Dem. 2. *Pars.* Ex præc. patet ut deſcendendo continuetur ratio data *a*, ad *b*, debere minorem terminum *a* dividi per denominatorem, qui cum non ſemper metiatur terminos, quos diviſurus eſt, provenient quandoque quotientes non integri numeri. Ut in ſerie hic appoſitâ denominator 2. Dividens *a* gignit quotientem *k*; & dividens *k*, quotientem *l*. dividens verò *l*, quem non metitur, gignit quotientem *m*.

Corollar. Cùm omnis progreſſio ab unitate incipiens, terminis conſtet multiplicem proportionem habentibus, patet ex theoremate eam poſſe per integros numeros infinitos continuari.

THEO-

THEOREMA 4.

NUlla proportio, quæ multiplex non ſit, per numeros integros continuari poteſt ſeu aſcendendo in infinitum, ſeu deſcendendo uſque ad unitatem.

Demonſtr. Proportionis, *a* ad *b*, quæ multiplex non eſt, hoc eſt cujus minor terminus non metitur majorem, denominator non eſt numerus integer. Ergo ut in præmiſſis num. 3. demonſtravi, minimos terminos, quibus exprimi ea poteſt, non ingreditur unitas, ſed ii ſunt duo numeri, qui proinde per 24. 7. inter ſe primi ſunt. Quare per 16 9 nequit illis reperiri tertius proportionalis; ac proinde neque aſcendendo, neque deſcendendo data proportio in his terminis continuari poteſt. Jam verò per p. 2. l. 8. exhiberi poteſt progreſſio proportionis datæ conſtans tribus terminis integris; item alia progreſſio terminorum 4; item alia terminorum 5: atque ita infinitæ progreſſiones diverſæ per 2. 8. reperiuntur, omnes terminis diverſis conſtantes, quarum unaquæque unum terminum habet amplius, quàm prior. Verum quia in ſingulis hiſce progreſſionibus datæ proportionis, extremi termini in p. 2. l. 8. jam citatâ demonſtrantur eſſe primi inter ſe, earum nulla continuari ulterius poteſt, ut patet ex 17. l. 9. Nulla igitur proportio quæ multiplex non ſit, &c. Quod erat demonſt.

l	k	h	g	f	a	b	m	n	o	p		
		$\frac{16}{3}$	8	12	18	27	$\frac{81}{2}$				Den.	$\frac{2}{3}$ Z

Si quæras, quouſque ſine fractis continuari poſſit, reſpondeo id ex ipſo opere continuationis innoteſcere. Ut ſurſum continues rationem *a* ab *b*, ducendus eſt denominator *z* in terminum majorem *b*, per th. 1. Quia verò denominator *z* integer numerus non eſt, qui producetur, neceſſariò fractus erit: qui ſi ad integrum reduci poteſt per ea quæ traduntur prob. 4. c. 3. l. 2. continuabitur per illum adhuc integrum ratio data *a* ad *b*; ſi non poſſit, quod continget ſi denominator numeratorem non metiatur, non poterit per integros numeros ratio *a* ad *b* ulterius continuari.

Theorema 5.

Progreſſio geometrica cujus extremi numeri ſunt primi inter ſe nec ſurſum nec deorſum ulterius poteſt per numeros integros continuari.

Demoſtratur p. 17. l. 9.

Theorema 6.

In omni progreſſione geometrica incipiente ab unitate, ſecundus terminus (unitas inter terminos non computatur) quartus, ſextus, & reliqui omnes locorum parium, ſunt quadrati.

Ter-

0	1	2	3	4	5	6	7	8
.	a	b	c	d	e	f	g	h
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.

Tertius, Sextus, Nonus, & reliqui duobus intermiſsis omnes, quorum videlicet exponentes metitur ternarius, ſunt cubi.

Sextus, Duodecimus, Decimus Octavus, & reliqui omnes, quorum exponentes metitur ſenarius, ſunt quadrati ſimul & cubi.

Quintus, Septimus, Undecimus, Decimus Tertius, & reliqui omnes, quorum exponentes ſunt primi numeri, neque quadrati ſunt, neque cubi.

Demonſtrantur hæc omnia in p.8. l. 9. ejuſque ſcholio. *Exponentes ſunt numeri ſerie naturali ab unitate, indicantes loca terminorum progreſſionis.*

THEOREMA 7.

IN *progreſsione geometrica trium terminorum* (bb) *quadratus medii (hoc eſt medius in ſeipſum ductus) producto* (ac) *extremorum æqualis eſt.*

a.	b.	c.
2	4	8
	bb	ab
	16	16

Demonſtratur p. 20. l. 7.

THEOREMA 8.

IN *progreſsione geom. quatuor terminorum, productum* (a d) *extremorum æquatur producto* (bc) *mediorum. Idem verum eſt in quibuſcunque quatuor proportionalibus, licet non continuè, ut ſi* f *ſit ad* g, *ut* k *ad* m. f m *productum ab extremis æquatur* gk *producto à mediis.*

a	b	c	d
2	4	8	16

ad	bc
32	32

f. g.	k m
2.6.	4 12

f m.	g k
24	24

Demonſtratur p. 19. l. 9.

THEOREMA 9.

IN *omni geometricâ progreſsione,* (af) *productum extremorum, & producta* (be, cd; *æqualiter ab extremis diſtantium inter ſe æqualia ſunt.*

Demonſtr. Quoniam omnes *a, b, c, d, e, f,* ſive *a,b,c,x,d,e,f,* ſunt continuè proportionales, manifeſtum eſt *a* eſſe ad *b*, ut *e* ad *f*. Ergo per 19. 7. *af* productum ex primo *a* in quartum *f* æquatur

a	b	c	d	e	f
3	6	12	24	48	96

Prod. 288.

a	b	c	x	d	e	f
3.	6.	12.	24.	48.	96.	192

Prod. 576.

pro-

producto *be*, ex mediis *b* & *e*. Pari ratione erit *b* ad *c*, ut *d* ad *e*. Ergo rurſum per 19. 7. *be* genitus ex *b* in *e* æquatur *cd* genito ex *c* in *d*. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 10.

QVivis terminus progreſsionis geometricæ in ſe ductus æquatur producto quorumlibet æqualiter ab ipſo diſtantium.

Demonſtr. Sumatur quicunque *x*, ſive is ſit præcisè omnium medius, ſive non. Quoniam ex hyp. *c*, *x*, *d* ſunt proportionales; erit per th. 7. ſive per 20, 7, *xx* quadratus aſſumpti *x*, æqualis *cd* producto extremorum *c* & *d*. Atqui per præced. productus ex *b*, in *e* æquatur producto ex *c* in *d*. Ergo etiam productus ex *b* in *e* æquatur quadrato aſſumpti *x*. Liquet ergo quæſitum. *Scema præc.*

Nota pro ſequentibus theorematis, loca terminorum progreſſionis numerari ab unitate excluſivè, vel, ſi progreſſionis principium non ſit unitas, excluſivè à termino minimo progreſſionis: id enim, ut deinde apparebit, commodius eſt ad praxim. Porrò numeri 0. 1. 2. 3. 4. *&c. ſupra progreſſionis terminos adſcripti, quos indices ſeu exponentes dicimus, indicant quotus quiſque ſit ab unitate, ſeu termino minimo; ſive quot locis quiſque ab unitate vel minimo termino diſtet. Supra unitatem ſcribitur*, 0; *Supra* (a) *primum ab unitate ponitur*, 1, *ſupra ſequentem* (b) 2, *& ſic deinceps ordine naturali.*

THEOREMA II.

	0.	1	2	3	4	5	6	7	8.
		a	b	c	d	e	f	g	h
	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128	256.

IN progreſsione geometricâ, cujus principium unitas eſt, ſi quivis terminus (c) *per ſeipſum multiplicetur, producetur alius ejuſdem progreſsionis terminus,* (f) *locis duplo pluribus ab unitate diſtans.*

Demonſtr. ex p. 11. l. 9. corol. 3. Et facile etiam oſtenditur ſi termini progreſſionis multiplicatione ſpeciosâ exprimantur.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1.	a.	aa.	aaa.	aaaa.	aaaaa.	aaaaaa.	a7.	a8.
1	2	4	8	16.	32	64	128.	256

Ex lemmate p. 8. l. 9, & quia multiplicationis productum ſolâ litterarum appoſitione exprimitur; patet ex *a* primo in ſe fieri *aa* ſecundum; & ex *a* in *aa* fieri tertium *aaa*; & ex *a* in *aaa* fieri quartum *aaaa*: & ſic deinceps. Ex quo manifeſtum eſt ſingulos terminos tot locis diſtare ab unitate, quot litteris ſcribuntur; & contrà tot ſcribi litteris, quot diſtant ab 1 locis. Atqui ſi terminus quivis, puta tertius *aaa*, in ſe ducatur productus (*aaaaaa*) duplo pluribus litteris ſcribitur quam ipſe. Ergo etiam duplo pluribus ab unitate diſtabit locis. Quod erat demonſtr.

THEO-

THEOREMA 12.

IN progreſsione geometrica, cujus principium unitas eſt, ſi termini duo quilibet (b *&* e) *invicem multiplicent, eorum ab unitate diſtantiæ ſimul ſumptæ conficiunt producti* (g) *ab unitate diſtantiam.* *Vide 1. Scema theor. prec.*

Demonſtratio ſimilis præcedenti. Exprimatur ſeries ſpecioſè. Et multiplicent ſeſe mutuo ſecundus *aa* & quintus *aaaaa*. Eorum litteræ ſimul junctæ dant productum *a*7 ac proinde (ut oſtendi in præced.) etiam eorum junctæ diſtantiæ exhibent diſtantiam producti ab unitate. Quod erat demonſtrandum. *V. Scema 2. prec.*

THEOREMA 13.

0.	1	2	3	4	5	6
a	b	c	d	e	f	g
3.	6.	12.	24.	48.	96.	192.

IN progreſsione geometrica, cujus principium unitas non eſt, ſi quivis terminus (c) *ſeipſum multiplicet, & productus per minimum* (a) *dividatur, quotiens diſtabit ab minimo* (a) *locis duplo pluribus, quam terminus ſeipſum multiplicans* (c.)

De-

Denom. q. 2.

0	1	2	3	4	5	6
a	aq	aqq	aqqq.	aqqqq.	aqqqqq.	aqqqqqq.
3	6	12	24	48	96	192.

Demonſtratio expeditur facillimè, ſi termini progreſſionis multiplicatione ſpecioſâ exprimantur. Per theor. 1. minimo termino *a* ducto in denominatorem *q* fit *aq* primus ab minimo: & primo *aq* ducto in denominatorem *q*, fit ſecundus *aqq*; & ex hoc in *q*, fit tertius *aqqq*: & ſic deinceps procreantur termini reliqui progreſſionis omnes. Ex quo patet quemlibet terminum tot locis diſtare ab minimo *a*, quot in ipſo reperiuntur litteræ *q* denominatorem exprimentes. Terminus jam quiſpiam, puta ſecundus *aqq*, ducatur in ſe, hoc eſt in *aqq*; productus (*aaqqqq*) continebit litteras illius bis, nimirum duo *a* & duplo plura *q*, quam producens (*aqq*.) Ergo ſi productus (*aaqqqq*) dividatur per minimum (*a*,) quotiens (*aqqqq*) ſcribetur uno *a* & duplo pluribus *q*, quam *aqq*, qui ſeipſum multiplicaverat. Quare cum jam oſtenderim terminum quemlibet tot diſtare locis ab minimo *a*, quot in ipſo reperiuntur *q*, liquet quotientem (*aqqqq*) locis duplo pluribus diſtare ab minimo *a*, quam (*aqq*) terminus ſeipſum multiplicans. Quod erat demonſtrandum.

THEO-

THEOREMA 14.

IN progreſſione geometrica, cujus principium unitas non eſt, duo quivis termini (c, *&* e) *ſeſe invicem multiplicent, & productus per minimum* (a) *dividatur: quotientis diſtantia à minimo* (a) *æqualis erit ſe mutuo multiplicantium diſtantiis à minimo, ſimul junctis.* Scema præc.

Demonſtratio eſt ſimilis præcedenti, ut tantum opus ſit exemplum adferre. Exprimatur ſeries ſpecioſè, ex qua ſe mutuò multiplicent primus *aq*, & quartus aqqqq. Productum erit *aaqqqqq*, quo diviſo per minimum *a*, quotiens eſt *aqqqqq*, qui eſt quintus in progreſſione terminus, cujus diſtantia ab minimo *a*, eſt 5, quam efficiunt ipſorum *aq*, & *aqqqq* diſtantiæ, 1, & 4.

THEOREMA 15.

SI à maximo termino finitæ progreſſionis duplæ auferatur minimus; reliquus æquatur ſummæ progreſſionis dempto maximo.

Minimus *a*, 3 auferatur ex maximo *g*. 192. Reliquus 189 æquatur	a b c d e f g. 3.6.12.24.48.96.192.

omnibus *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* hoc eſt toti ſummæ dempto maximo *g*.

Demonſtratum eſt in corol. 4. prop. 35. l. 9.

THEO-

THEOREMA 16.

IN omni finitâ progreſsione geometricâ, ut denominator unitate mulctatus eſt ad unitatem, ita maximi & minimi termini differentia (ſive maximus dempto minimo) eſt ad totam progreſsionis ſummam dempto maximo.

Demonſtratum eſt in corol. 1. prop. 35. l. 9.

Coroll. Itaque exceſſus maximi termini ſupra minimum, in progreſſione dupla, æqualis eſt ſummæ reliquorum (hoc eſt omnibus dempto maximo) in progreſſione tripla, duplus; in progreſſione quadrupla triplus, & ſic deinceps.

Demonſtr. patet ex hoc theoremate.

THEOREMA 17.

Schema theor. 15. *IN omni progreſsione geometricâ finitâ, ut duorum maximorum* (f, g) *terminorum differentia eſt ad maximum* (g,) *ita maximus dempto minimo* (a) *eſt ad totam progreſsionis ſummam dempto minimo.*

Demonſtr. eſt coroll. 5. prop. 35. l. 9.

THEOREMA 18.

SI progreſsio quæcunque geometrica deſcendendo continuetur in infinitum; ut denominator unitate mulctatus eſt ad unitatem, ita primus ſeu maximus terminus eſt ad reliquam infinitorum terminorum ſummam.

Den-

Dentur *exempli gratia* duo termini proportionis triplæ 54 & 18; & progreſſio inſtituatur *a,b,c,d* &c. continueturque per theor. 2, deſcendendo (hoc eſt per terminos proportionaliter decreſcentes) in infinitum: Ut denominator 3 unitate mulctatus, nempe 2, eſt ad unitatem; ita primus terminus 54 eſt ad ſummam reliquorum infinitorum *b, c, d, e, f* &c.

a	b	c	d	e	f	g	h	k
54.	18.	6.	2.	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{2}{423}$

M. 27.

Demonſtr. Per theor. 16. in progreſſione finitâ ut denominator unitate mulctatus eſt ad unitatem, ſic primus ſeu maximus terminus, dempto minimo, eſt ad ſummam reliquorum. Quare cum in progreſſione per decreſcentes in datâ proportione terminos in infinitum continuatâ, minimus terminus evaneſcat (ut oſtenſum eſt in elementis noſtris geom. in ſchol. p. 11. l. 6. lem. 2) erit ut denominator unitate mulctatus ad unitatem, ita primus terminus ad reliquorum infinitorum ſummam. Quod erat demonſtr.

Vides opinor, qui hæc legis, quàm facilis ſit, quod ſupra me oſtenſurum promiſeram à progreſſione finitâ ad infinitam tranſitus. Unde mirum eſt priores arithmeticos, qui progreſſiones finitas tenerent, infinitas ignoraſſe, cum hæ ab illis immediatè dependeant. Theorema ſiquidem, 16, ex quo demonſtratio hujus facillimè deducta eſt, corollarium eſt prop. 35. *l.* 9.

Idipſum apparebit ex corollario ſequenti, ex theorematis 19, 20, *& coroll. theor.* 19. *ex problematis* 7, 8, 9, 10, 11.

Co-

Corollarium.

PRimus terminus, reliquorum infinitorum ſummæ, in progreſſione dupla, æqualis eſt, in progreſſione tripla, duplus; in progreſſione quadrupla triplus; in quintupla, quadruplus, & ſic deinceps.

Patet ex theoremate.

THEOREMA 19.

SI progreſſio geometrica deorſum continuetur in infinitum, ut duorum primorum, hoc eſt maximorum, terminorum differentia eſt ad ſecundum terminum, ita primus terminus eſt ad reliquam infinitorum terminorum ſummam.

Demonſtr. Per prop. 35. l. 9. in progreſſione finitâ ut primorum ſeu maximorum terminorum differentia eſt ad ſecundum, ita primus dempto minimo eſt ad ſummam reliquorum. Quare cum in progreſſione deſcendendo in infi-
a *per lem.* nitum continuatâ, minimus *a* terminus evaneſ-
2. *in ſchol.* cat, erit ut primorum differentia ad ſecundum,
poſt 11. *l.* ita primus ad reliquorum infinitorum ſummam.
6. Quod erat demonſtrandum.

Theorema convenit tam magnitudinibus quam numeris quemadmodum & 35. 9. à qua dependet. Cæterum hic rurſus apparet quam expeditè à finitis progreſſionibus ad infinitas tranſeatur.

THEOREMA 20.

Iſdem poſitis, ſi primorum duorum terminorum differentia (a x) *primus terminus* (ab) *&* a z *ſint continuè proportionales, erit* (a z) *tota terminorum infinitorum ſumma.*

a—x———b———c—d—e———z

Demonſtr. Quoniam *ax*, eſt ad *ab*, ut *ab* eſt ad *az*, erit invertendo *ba* ad *xa* ut *az* ad *ba*. Ergo dividendo *bx* ad *xa*, ut *zb* ad *ba*. Igitur invertendo *ax* (differentia primorum *ab*, & *bc*) eſt ad *bx* ſeu *bc* ſecundum, ut *ab* primus eſt ad *bz*. Ergo per th. 18, *bz* eſt ſumma omnium dempto primo *ab* Ergo *az* eſt ſumma tota. Quod erat demonſtr.

Corollar. Quando igitur progreſſionis duo maximi termini (*k*, *l*) ſolum unitate differunt, quadratus primi termini æquatur reliquorum infinitorum ſummæ.

k	l.	m
9.	8.	$\frac{64}{9}$ &c.

Demonſtratio patet ex hoc theor. & ex 18. l. 9. Tunc enim duorum primorum differentia eſt 1, quæ dividens quadratum maximi termini, per 18. 9 exhibet tertium proportionalem, ipſum videlicet quadratum, quem dividendo non mutat.

THEOREMA 21.

Progreſſionis geometricæ admiranda incrementa.

Multa hanc in rem afferri ſolent. Unum ego afferram, ſed illuſtre, & quam breviſſimè: oſtendam

vix

videlicet progreſſionis decuplæ incipientis ab unitate trigeſimum ſeptimum terminum plures continere unitates, quam arenas contineat orbis terræ: Et ſi primus terminus ſtatuatur arenula, trigeſimum ſeptimum ab illo, futurum toto terrarum orbe majorem.

Ratiocinatio formabitur hunc in modum.

Scribit Archimedes in arenario, ſe comperiſſe 35 grana papaveris longitudinem digiti geometrici excedere. Sed ponamus ea eſſe minora, & grana 40 efficere digitum.

Quoniam igitur milliare continet 80, 000 digitorum (continet enim 5000 pedum, quæ ducta in 16 digitos in pede uno contentos, efficiunt 80 000) ſi hæc ducantur in 40 grana unum pedem æquantia, fiunt 3 (200, 000, numerus granorum conficiens milliare unum.

Jam ex Aſtronomis nemo diametro terræ tribuit milliaria 10, 000. Sed demus eam eſſe tantam. Igitur ſi 10, 000 ducantur in grana unius milliaris nempe in 3 (200, 000, provenient grana 32, 000 (000000, quæ continet terræ diameter. Verum pro duabus notis (32) ſubſtituamus has (100) ut fiat numerus rotundus A, granorum terræ diametrum componentium, qui prioris plus quam triplus eſt, adeòque & terræ diameter ex hoc capite rurſum augebitur pluſquam triplo, fietque major, 30, 000 milliariorum. Erit igitur ut, 1, ad numerum A, ita grani diameter ad diametrum terræ.

1. Gran.
A 100,000 (000000
B. 10, 000 (000000 (000000 (000000
C. 1. 000(000000(000000(000000(000000
(000000 cyſ. 33.

Continuetur ratio, 1. ad A per quatuor terminos, 1, A, B, C. Erit per 18. l. 12 ut 1, ad C, ita grani ſphærula ad ſphæram terræ; quæ proinde continet numerum granorum C. Is verò præter unitatem habet cyfras 33. Cum enim primus A habeat cyfras 11. ſecundus B habebit 22, & tertius C, 33 ut patebit ex probl. 1. infra.

Ut jam cognoſcantur arenæ orbis terræ, inveniendæ tantùm erunt arenæ unius grani. Certum eſt grani ſphærulam non continere arenas 10000. Si ergo C numerus granorum terræ ducatur in 10, 000, proveniet D numerus arenarum totum globum terræ componentium; non illum quidem, qui de facto eſt; ſed alium longè majorem illo, cùm & grana aſſumpſerim minora quàm ſint, & arenas uni grano dederim juſtò plures, & diametrum terræ poſuerim multò plus, quàm triplo majorem verâ; ex quo poſtremo ſolo, cæteris neglectis ſphæra ex arenis D compoſita, per 18. l. 12, plus quàm vigeſies ſepties orbe noſtro toto major eſt.

D.

10 (000000 (000000 (000000 (000000 (000000
(000000

Eſt porrò numerus D, quia conſtat unitate

& cyfris 37, terminus trigeſimus ſeptimus progreſſionis decuplæ, 1, 10, 100 &c. ut patebit ex prob. 1.

Scio minori numero quæſitum obtineri poſſe, ſi aliter calculus inſtituatur. Sed quia id parum intereſt ad finem hic intentum, hanc viam, cæteris breviorem, ſecutus ſum.

THEOREMA 22.

PErinde admiranda ſunt progreſſionum geometricarum decrementa, atque incrementa.

Quemadmodum enim ab unitate per 37 terminos proportionis decuplæ aſcendendo pervenitur ad numerum, qui multò major ſit numero arenarum, totam telluris molem componentium; ita viciſſim ab illo propè immenſo numero per 37 terminos proportionis decuplæ deſcendendo, devenitur ad unitatem. Et quemadmodum ab arenulâ minimâ aſcendendo per proportionis decuplæ terminos 37, ventum fuit ad magnitudinem toto terrarum orbe majorem; ita viciſſim ab ingenti illâ mole orbis terrarum deſcendendo per decuplæ proportionis 37 terminos, venietur ad arenulam.

CAPUT V.

Progreſsionis geometricæ finitæ ac infinitæ Problemata.

PROBLEMA I.

DAtam progreſsionem geometricam tam ſurſum quam deorſum continuare in infinitum.

Conſtructio habetur ex theor. 1. & 2. Quædam ſolummodo hic annotanda ſunt:

1. Progreſſionis ab unitate incipientis denominatorem eſſe terminum ab unitate primum. Patet ex definitione denominatoris.

2. Cùm termini progreſſionis conſtant unitate & cyfris, ſolâ cyfrarum primi poſt unitatem termini additione cæteros terminos procreari, ut in theor. 21, quia A primus habet cyfras 11; ſecundus B, habebit 22 cyfras; tertius C, cyfras 33 & ſic deinceps. Patet ex theor. 1, & ex ipſo multiplicationis opere.

3. Terminum quemlibet progreſſionis decuplæ, 1, 10, 100 &c. tot locis diſtare ab 1, quot cyfras habet. Patet ex 2. hic.

PROBLEMA II.

PRogreſsionis geometricæ ab unitate incipientis, terminum quemcunque, licet cogniti non ſint omnes medii, exhibere.

Res tota pendet ex 11 & 12 theor. Data ſit exempli gr. progreſſio dupla ab 1, cujus oporteat terminum quadrageſimum tertium invenire.

Continuetur progreſſio per aliquot terminos, quouſque nimirum potes abſque moleſtia,	0 1 2 3 4 5 1. 2. 4. 8, 16. 32.

(hic facile continuabis uſque ad quintum) & ſupra ſingulos ſcribantur exponentes. Duc quintum terminum 32 in ſe: proveniet decimus 1024 per theor. 11. hoc rurſum in ſe ducto, prodibit 1048576 vigeſimus per idem theor. quo etiam ducto in ſe, fit quadrageſimus 1(078,340(527,776. cujus exponens eſt 40: quæritur autem terminus exponentis 43. Differentia exponentium inventi 40, & quæſiti 43 eſt 3. Terminum igitur exponentis 3. nempe 8, duc in terminum jam inventum exponentis 40: producetur terminus exponentis 43, quæſitus, ut patet ex theor. 12, nimirum 3(235,621(583,328.

Simili modo per 11 & 12 theor. facile erit quemvis terminum cujuſcunque progreſſionis reperire.

PROBLEMA III.

Progreſsionis geometricæ, cujus principium non eſt unitas, quemcunque terminum, licet cogniti non ſint omnes medii, invenire.

Praxis tota pendet ex theor. 13 & 14. Data ſit progreſſio *a* ad *b*, cujus oporteat terminum vigeſimum nonum reperire.

Continuetur progreſſio per aliquot terminos, puta tres & ſingulis ſuos exponentes ſupraſcribe. Ducatur deinde tertius in ſe, & producto	0 1 2 3 a b c d 2. 6. 18 54.

di-

diviſo per *a* proveniet ſextus. Hoc rurſum in ſe ducto & diviſo per *a* habetur duodecimus: quo etiam in ſe ducto ac diviſo per *a* prodibit vigeſimus quartus, cujus diſtantia ſeu exponens 24 deficit ab 29 exponente quæſiti defectu 5. Aſſumo ergo duos exponentes, ut 3 & 2, qui juncti faciunt 5; & termino quidem exponentis 3, ducto in terminum jam inventum exponentis 24, & diviſo producto per *a*, habetur vigeſimus ſeptimus; quo rurſum ducto in terminum exponentis 2, ac diviſo per *a* habetur vigeſimus nonus, qui petebatur.

Demonſtratio patet ex theor. 13 & 14. Simili methodo, quilibet alii termini reperientur.

PROBLEMA IV.

Progreſsionis duplæ finitæ ſummam exhibere.

A maximo termino (*g*) aufer minimum (*a*) reſiduus omnibus antecedentibus (*f*, *e*, *d*, *c*, *b*, *a*) æqualis eſt, per theor. 15.

a	b	c	d	e	f	g
3	6	12	24	48.	96.	192

$$\begin{array}{r} 192 \\ 3 \\ \hline 189 \end{array}$$

PROBLEMA V.

Cujuſcunque progreſsionis geometricæ finitæ ſummam exhibere.

Maximus terminus ſi non datur, inveniatur per probl. 2. vel 3. A maximo aufer minimum: re-

ſiduum divide per denominatorem progreſſionis unitate mulctatum. Quotiens æqualis erit toti ſummæ dempto maximo.

Demonſt. Per theor. 16, ut denominator unitate mulctatus, eſt ad. 1, ita maximi & minimi differentia eſt ad ſummam reliquorum. Ergo per 19. l.9. quartus proportionalis, reliquorum nempe ſumma invenitur, ſecundum (qui eſt unitas) ducendo in tertium (maximi nempe ac minimi differentiam) & productum, hoc eſt differentiam ipſam (ea quippe ducta in 1, non immutatur) dividendo per primum, nempe per denominatorem unitate mulctatum.

Exempla. Detur progreſſio tripla *k*, *m*, *n*, &c. Denominator unitate mulctatus eſt 2. à maximo, aufer minimum *k* reſiduum 728.

k m n o p q r
1.3.9.27.81.243.729
3. den.

a b c d e f g
2.3.$\frac{9}{2}$.$\frac{27}{4}$.$\frac{81}{8}$.$\frac{243}{16}$.$\frac{729}{32}$

q $\frac{1}{2}$ S $\frac{3}{2}$ denom. l. $\frac{697}{64}$ (V $21\frac{25}{32}$

Divide per 2. Quotiens 364 æquatur omnibus antecedentibus *q*, *p*, *o*, *n*, *m*, *k*.

Detur deinde progreſſio ſeſqui-alteræ proportionis, *a*, *b*, *c* &c. Aufer minimum *a* ex maximo *g*; reſiduum eſt *l*. Ex denominatore *s* aufer unitatem: reſtat *q*. Per *q* divide reſiduum *l*, maximi nempe & minimi differentiam. Quotiens V æquatur omnibus maximum antecedentibus *f*, *e*, *d*, *c*, *b*, *a*

PRO-

PROBLEMA VI.

Cum progreſſio datur finita proportionis multiplicis, ejus ſumma adhuc aliter reperitur per corol. theorematis 16.

Si datur progreſſio duplorum ; exceſſui primi termini ſupra minimum adde æqualem numerum.

Si datur progreſſio triplorum ; eidem exceſſui adde dimidiam ejus partem :

Si datur progreſſio quadruplorum ; exceſſui adde tertiam ejus partem.

Et ſic deinceps : hâc additione habebitur tota ſumma terminorum omnium, dempto minimo, ut patet ex citato ſuprà corollario.

PROBLEMA VII.

Progreſſionis geometricæ cujuſcunque per infinitos terminos deſcendentis ſummam exhibere.

Primus terminus dividatur per denominatorem progreſſionis unitate mulctatum : quotiens primo termino adjunctus exhibet totam ſummā terminorum infinitorum progreſſionis datæ.

Demonſtr. Per 18. theor. ut denominator unitate mulctatus eſt ad unitatem, ita primus terminus eſt ad reliquam infinitorum terminorum ſummam. Cum hæc igitur illis tribus ſit quarta proportionalis, exhibebitur ipſa per 19. 9. ſi ſe-

cunda quantitas ducatur in tertiam unitas nempe in primum progreſſionis terminum & productum hoc eſt primus ipſe terminus (is enim ductus in 1, non immutatur) dividatur per denominatorem unitate mulctatum, qui ex quatuor proportionalibus erat primus.

Exempl. Data ſit progreſſio proportionis octuplæ, per infinitos terminos deſcendens. Primus *a* ſi dividatur per denominatorem unitate mulctatum, hoc eſt per 7, quotiens erit P. Igitur P æquatur toti ſummæ infinitorum dempto primo *a*. Quare ſi P addatur ad *a* fiet Q, infinitis terminis in proportione octupla decreſcentibus *a*, *b*, *c*, *d* &c. æqualis.

a b c d e f g

$512.\ 64.\ 8.\ 1.\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{64}\ \frac{1}{512}$ &c.

8. Denom.

P $73\frac{1}{7}$ Q $585\frac{1}{7}$

k. m. n. o

$25.\ 20.\ 16.\ \frac{64}{5}$ &c.

$\frac{5}{4}$ den $\frac{1}{4}$ p

Aliud. Data ſit progreſſio *k*, *m*, *n*, *o* &c. Hujus denominator unitate mulctatus eſt *p*. Per hanc diviſo primo termino *k*, 25, quotiens proveniet 100. Quibus additis ad primum terminum, fit numerus 125 æqualis proportionalibus infinitis *k*, *m*, *n*, *o* &c.

PROBLEMA VIII.

P*Rogreſſionis geometricæ cujuſcunque per infinitos proportionales terminos deſcendentis ſummam aliter exhibere.*

Per

Per exceſſum primi termini ſupra ſecundum divide quadratum primi termini; quotiens toti ſummæ infinitorum proportionalium æqualis eſt.

Demonſtr. Patet ex th. 20. & ex 18. l. 9.

Exempl. Repetatur progreſſio antecedens *k*, *m*, *n*, *o* &c. Exceſſus primi termini ſupra ſecundum eſt 5, quadratus primi 25. eſt 625: quo diviſo per exceſſum 5, fit quotiens 125. æqualis proportionalibus infinitis. *k*, *m*, *n*, *o* &c.

PROBLEMA IX.

Progreſsionis multiplicis per infinitos terminos deſcendentis ſummam aliter invenire.

Si datur progreſſio dupla ut 12. 6. 3 &c primo termino adde æqualem,

Si tripla, ut 9, 3, 1. &c. primo termino adde partem ejus dimidiam,

Si quadrupla ut 16, 4. 1. &c. primo termino adjice partem ejus tertiam.

Si quintupla ut 25, 5, 1. &c. primo termino adde partem ejus quartam: atque ita deinceps. Hâc additione ſumma procreabitur æqualis toti progreſſioni proportionalium infinitorum.

Demonſtratio patet ex coroll. theorematis 18.

PROBLEMA X.

Progreſſionis ſuper-particularis per infinitos terminos deſcendentis ſummam aliter invenire.

Cum

a	b	c	d	e
16	12	9	$\frac{27}{4}$	$\frac{81}{16}$

den. $1 \frac{1}{3} \frac{n}{m}$ 64. Z

x. 48.

Cum proportio ſuperparticularis ſit, quando major terminus (*a*) minorem (*b*) continet ſemel, & unam ejus aliquotam, numerus aliquotam denominans ſit *m*.

Primus terminus per hunc (*m*) multiplicatus, æquatur toti ſummæ infinitorum reliquorum (*b, c, d, e* &c.)

Demonſtr. Denominator proportionis ſuperparticularis eſt unitas cum fracto, cujus numerator eſt unitas, nominator verò ipſe numerus *m* aliquotam denominans. Ergo denominator progreſſionis ſuperparticularis unitate mulctatus eſt ſola illa fractio *n, m*: per quam diviſo primo *a*, provenit ſumma reliquorum infinitorum *b, c,d, e*, &c. ut patet ex probl. 7. Atqui primus terminus *a* dividitur per fractum *n, m*,cum per eundem inverſum multiplicetur; multiplicatur verò per illum inverſum primus *a*, ſi ſolus nominator *m* multiplicet primum *a* cùm numerator *n* ſit unitas: quæ omnia patent ex cap. 7. l. 2. Ergo ſi *m* numerus aliquotam denominans, multiplicet primum *a*, habetur ſumma reliquorum infinitorum *b, c, d, e* &c. Quod erat demonſtrandum.

PROBLEMA XI.

PRogreſſionis geometricæ, cujus primi duo termini differunt unitate, per infinitos terminos deſcendentis, ſummam aliter exhibere.

Du-

Ducatur primus terminus in ſeipſum ut habeatur ejus quadratus. Is toti infinitorum proportionalium ſummæ æqualis eſt.

Demonſtratio patet ex coroll. theor. 20. 9. 8. $7\frac{1}{9}$ &c.

Exempl. Data ſit progreſſio proportionis 9 ad 8. Primi termini quadratus 81, infinitis hujus progreſſionis terminis æqualis eſt.

Præcedentia 5 problemata, quæ artificio longè faciliimo progreſſionis per infinitos terminos deſcendentis exhibent ſummam, deducta ſunt vel ex theoremate 18. *ejuſque corollario, vel ex* 20: *illa verò nullo negotio ex progreſſione finita deduxi. Liquet igitur, quod initio ſpoponderam, progreſſionis infinitæ myſterium omne in finita latere.*

Cæterùm aſſertiones theorematum 18, 19, 20 *capitis præcedentis & conſtructiones problematum* 7. 8. 10. 11 *capitis hujus, quædam ſunt P. Gregorii in lib. 2. quadraturæ: quædam ex illo derivari poſſunt; quamvis ego, ut jam dixi, tam has quàm illas, ex progreſſione finita, quæ ſimiles planè ac infinitæ affectiones habet, novâ quâdam ratione deduxerim ac demonſtraverim. Interim P. Gregorio ſua laus manet, & ea quidem eximia prorſus & ſingularis, qui progreſſionum naturam libro integro, ampliſſimè ſubtiliſſimèque proſecutus ſit, ut cæteris non niſi ſpicas ex ſua meſſe colligendas reliquerit.*

PROBLEMA XII.

Progreſſionis finitæ, dato denominatore, ſummâ, & maximo termino, invenire minimum.

De-

Denominator unitate mulctatus ducatur in ſummam omnium dempto maximo. Productum (z) aufer à maximo. Reſtabit minimus.

Demonſtr. Denominator unitate mulctatus dividens maximum dempto minimo, quotientem produxit ſummam omnium præter maximum, ut patet ex probl. 5. Ergo ex definitione diviſionis ſi quotiens, nempe ſumma omnium præter maximum, ducatur in denominatorem unitate mulctatum, producetur maximus dempto minimo. Ergo ſi hoc productum auferatur ex maximo, relinquetur minimus qui quærebatur.

PROBLEMA XIII.

Progreſſionis finitæ, datâ ſummâ, denominatore, & minimo termino invenire maximum.

Denominator unitate mulctatus ducatur in ſummam omnium, & producto addatur minimus. Hoc aggregatum divide per denominatorem: Quotiens erit maximus quæſitus.

Demonſtr. hujus operationis patet ex probl. 5 & ex analyſi per quam inventa eſt.

PROBLEMA XIV.

Progreſſionis finitæ datis extremis & omnium ſummâ, invenire denominatorem, & ſingulos intermedios.

Maximi ac minimi differentiam divide per ſummam omnium dempto maximo. Quotiens unitate auctus eſt denominator: quo invento per probl. 1. habentur ſinguli termini.

De-

Demonſtr. Si maximi ac minimi differentia dividatur per denominatorem unitate mulctatum, per probl. 5 provenit ſumma omnium dempto maximo. Ergo per corol. 2. p. 16. l. 7. Si eadem maximi ac minimi differentia dividatur per ſummam omnium dempto maximo, proveniet denominator unitate mulctatus. Quod erat demonſtr.

PROBLEMA XV.

Progreſsionis infinitæ deſcendentis dato denominatore & omnium ſummâ, invenire maximum terminum, & reliquos.

Denominator unitate mulctatus ducatur in ſummam omnium: productum dividatur per denominatorem, quotiens erit maximus terminus.

Demonſtratio hujus operationis patet ex probl. 7. & ex analyſi, per quam inventa eſt.

PROBLEMA XVI.

Progreſsionis infinitæ deſcendentis, dato maximo termino & omnium ſummâ, invenire denominatorem, & reliquos terminos.

Primum terminum divide per ſummam omnium dempto maximo. Quotiens unitate auctus erit denominator: quo invento per probl. 1. habentur ſinguli termini.

Demonſtr. Si denominator unitate mulctatus dividat primum terminum, quotiens per probl. 7. eſt ſumma omnium dempto maximo. Ergo ſi ſumma omnium dempto maximo dividat eundem

dem primum, quotiens erit denominator unitate mulctatus, per 2 corol. p. 16. l. 7. Quotiens igitur unitate auctus, erit denominator quæſitus. Quod erat demonſtrandum.

CAPUT VI.

Quæſtiones circa progreſſionem geometricam.

Reliquum eſt ut ex problematis jam allatis ad materiam nonnulla applicemus.

QUESTIO. I.

Quanto tempore potuerit humanum genus propagari?

Statuamus Adamum 20 annis genuiſſe 20 liberos, 10 mares & 10 fæminas. His verò & deinceps aliis, qui ab his deſcendent, ut ſinguli proles 20 gignant paria ſcilicet 10. maris ac fæminæ, demus annos 40, annis nempe 20, quibus apti ad generandum evadant, aſſignatis.

Adam igitur 20 annis genuit maris ac fœminæ paria 10. Ab illis 40 annis ſequentibus gignentur paria 100. Ab his verò proximis 40 annis, producuntur paria 1000: Atque ita deinceps per ſingulos quadragenos annos inſtituetur progreſſio proportionis decuplæ; cujus terminus nonus, qui eſt 100(000000, incidit in annum mundi 340. Quadragenâ igitur annum 340 complente naſcentur 1000 milliones parium & quadragenâ complente annum mundi 380, decies mille milliones parium: ea verò quæ complet annum

420,

420, parium 100 millia millionum: & ſic deinceps. Tandem in quadragenâ complente annum 620, naſcentur paria hominum 10, 000 (000000 (000000, hoc eſt decies mille milliones millionum; is enim eſt progreſſionis decuplæ terminus decimus ſextus, incidens in annum mundi 620. per additionem continuam 40, ad 20 primos Adami annos. Quid ſi his addamus omnes præcedentium quadragenarum homines, pleroſque adhuc ſuperſtites, quanta multitudo ex ſolis 20 liberis Adami primo mundi vicenario procreatis exſurget?

Atqui in hac hypotheſi habita ſolum fuit ratio unius vicenarii annorum Adam. Quot igitur tales ex Adami ætate accipiemus annorum vicenarios, tot habebimus progreſſiones generationum ſimiles, quarum quælibet annos mundi 20 plures continebit quam progreſſio ipſam antecedens. Similiter ex ætatibus deſcendentium ſingulorum habita ſolum fuit ratio annorum à 20 uſque ad 40, ac ſi per reliquam vitam liberos nullos producerent. Quæ omnia ſi in calculum deducantur, hominum multitudo adhuc multò amplior evadet: vel certè abundè compenſabunt ea, quæ in hypotheſi ſuperiori alicui videri poſſint liberalius aſſumpta.

QUÆSTIO 2.

Quantum frumenti ex uno grano haberi poſsit intra annos 8?

Reſpondeo granorum plus quam decies mille milliones millionum.

Nam granum unum plura ordinariè profert quam

quam 100. ſtatuamus tamen proferre 100. Hæc ſequenti anno producent centies centum grana, hoc eſt 10, 000. Atque ita progreſſio proportionis centuplæ inſtituetur per annos 8. Anno igitur octavo granorum numerus proveniet 10, 000(000000(000000, hoc eſt decies mille milliones millionum, is enim, ut patet ex probl. 1, eſt octavus terminus progreſſionis centuplæ. Quod ſi hæc progreſſio per paucos adhuc annos continuetur; ne omnia quidem totius mundi horrea capient frumenti copiam ultimo anno provenientem.

Hinc apparet quàm facilè peregrini fructus, olera, flores &c. in aliquam provinciam advecti, intra annos non multos multiplicentur.

QUÆSTIO 3.

Statuamus Beatiſſimæ Virginis Deiparæ hanc à Deo prærogativam eſſe datam, ut per ſingulos charitatis actus gratiam prius habitam duplicaret; ſtatuamus inſuper gratiam intra primum annum, quo ratione fuerit uſa, acquiſitam, ita exceſſiſſe gratiam primo acceptam ut hic numerus 18(446, 774(073, 709(551, 615. unitatem. Quæritur per quot actus tantam gratiam obtinuerit?

Reſpondeo per 64. progreſſionis enim duplæ per 64 terminos continuatæ ſumma conſtituit dictum numerum.

QUÆSTIO 4.

Si mobile quodpiam ita moveretur per totam æternitatem ut primo die conficiat milliaria 9. ſecundo die milliaria 8, tertio 7 & 1 nonam, & ſic deinceps diebus ſingulis percurrat ſpatia in proportione ſemper eâdem 9 ad 8, decreſcētia. Quæritur

tur omnia illa ſpatia percurſa æternitate tota, ſi in unam ſummam colligantur, quot milliaria conficient?

Invenienda eſt ſumma progreſſionis per infinitos terminos proportionis 9 ad 8 deſcendentis. Ea verò eſt 81. Conficeret igitur mobile iſtud motu eâ ratione in æternum continuato non niſi 81 milliaria: hoc eſt, conficeret plus omni eo quod minus eſt milliaribus 81, accederetque ad hunc terminum intervallo quovis dato minori licet nunquam pertingeret.

QUÆSTIO 5.

ab 12 a..c.........b
cb 10 d.18
....
f.9
....

DUo viatores iter faciunt; primus quotidie abſolvit milliaria ab *(12), ſecundus quotidie milliaria* cb *(10) ſed primum præceſſit milliaribus* d, (18). *Quæritur quo die, & poſt quot milliaria primus ſecundum aſſequetur.*

Problema, hâc quæſtione contentum, à P. Gregorio à S. Vincentio, applicatur Achilli teſtudinem inſequenti, & tum ab illo, tum ab aliis ex illo, ſolvitur per progreſſiones geometricas, quæ cauſa fuit cur id hoc loco adduxerim. Verum independenter etiam à progreſſionibus & expeditiſſimè quidem ſolvitur hunc in modum.

Milliariorum, quæ uterque abſolvit quotidie, differentia *ac*, dividat milliaria *d*, quibus alter præceſſit, quotiens *f* erit numerus dierum (9) quo primus ſecundum aſſequetur. Quod ſi *f* ducas in

ab provenient milliaria (108) in quorum termino ſe invicem aſſequentur.

Demonſtr. Quoniam *ac* dividens *d* fecit *f*; ergo *ac* in *f*, producit *d*; hoc eſt *ac* in *f* æquatur *d*. Quare ſi addatur utrique quod fit ex *cb* in *f*, erit *ac* in *f* unà cum *cb* in *f* æquale ipſi *d* cum *cb* in *f*. Atqui per 1, 2. *ac* in *f*, cum *cb* in *f* eſt *ab* in *f*. Ergo *ab* in *f*. (hoc eſt milliaria quæ diebus *f* primus confecit) æquantur ipſi *d*, cum *cb* in *f*, hoc eſt millia-ria quæ diebus *f* primus confecit) æquantur ipſi *d*, cum *cb* in *f*, hoc eſt milliaribus quibus ſecundus præceſſerat, unà cum his, quæ confecit diebus *f*. Ergò in termino dierum *f*, primus ſecundum aſſecutus eſt. Quod erat demonſtrandum.

CAPUT VII.

De mediis quotcunque proportionalibus inter duos datos numeros.

INter duos datos numeros datam mediorum proportionalium multitudinem invenire, nihil aliud eſt, quàm progreſſionem geometricam exhibere conſtantem dato numero terminorum, cujus extremi duo ſint dati. Pertinet igitur ad progreſſiones, quod hoc capite proponitur.

THEOREMA I.

A 2		5 B
	X	
C 10		Z.

INter duos numeros (A, B) qui ſe invicem multiplicantes, quadratum numerum non producunt, medius proportionalis neque integer, neque fractus reperiri poteſt.

De-

Demonſtr. Si enim poſſit, ille ſit X, qui in ſe ductus faciat Z Ergo per 20. 7 factus ex A in B, nempe C, æquatur Z. Quare cum numerus X ſit radix quadrata Z per conſtr. etiam numerus X erit radix quadrata numeri C, facti ex A in B. Atqui numerus C ex hypotheſi eſt non quadratus. Ergo numeri non quadrati datur aliqua radix quadrata X; quod eſt abſurdum, cum demonſtratum ſit cap. 7, l. 3. numeri non quadrati radicem, neque integro numero ullo, neque fracto explicabilem eſſe.

Aliter. Medius proportionalis inter A, & B eſſet radix quadrata geniti ex A ducto in B: ut patet ex 20. 9. At radix iſta cum genitus ex A in B ex hypotheſi ſit non quadratus, nullo numero ſive integro ſive fracto explicabilis eſt, ut oſtendi l 3. c. 7. Ego inter A & B nullus cadit medius proportionalis, ſive integer ſive fractus. Quod erat demonſtrandum.

Eſt illa igitur arcana indoles numerorum, ut quamvis quibuſlibet duobus da:is ſemper exhiberi poſſit tertius proportionalis ſaltem fractus, medius non ſemper poſſit.

Sed & hoc obſervatione dignum, inter quos numeros non cadit medius unus, inter eos poſſe exhiberi medios duos aut plures. Exponatur ſeries progreſſionis duplæ; in 1 2 4 8 16 32 64 128 *hac 2 & 16 ſe invicem multiplicantes gignunt 32, qui quadratus non eſt, ac proinde inter eos unus medius non cadit: & nihilominus exhibentur inter eos medii duo, nempe 4 & 8. Pari modo 2 in 64 gignit 128, qui quia quadratus non eſt inter 2 & 64 nequit reperiri medius unus, & tamen inter eos exhibentur medii quinque, nimirum 4, 8, 16, 32, 64.*

THEOREMA 2.

X a. b. c Z
d g
e h
f k
i

DAti ſint duo numeri X, *Z, vel primi abſolutè, vel primi inter ſe alterutro exiſtente primo. Dico inter hos aut quoſlibet his proportionales nullos exhiberi poſſe medios proportionales ſive integros ſive fractos.*

Demonſtr. Cadant, ſi fieri poteſt, inter X & Z, primo medii proportionales integri quocunque numero, puta tres, *a, b, c*. Quia ergo inter X, Z, inter ſe primos cadunt tres medii, etiam per *9*, 8 inter ipſos & unitatem totidem medii cadent, *d,e,f*,& *g,h,k*. Ergo per 11. *9*, quilibet mediorum *d, e, f*, metitur X, & quilibet ipſorum *g, h, k* metitur Z;quod eſt abſurdum cum alteruter datorum X, Z, ponatur eſſe primus.

Cadant deinde inter X, Z, ſi fieri poteſt, medii proportionales fracti *ab* , *cd* , *ef*. Revocentur tam integri X, Z, quam fracti medii ad fractiones ejuſdem nominis *op*, *lp*, *mp*,*np*,*ſp*. Erunt igitur etiam hæ continuè proportionales. Quia verò harum fractionum communis eſt nominator *p*, erunt per th. *6*. c. 2. l. 2. numeratores *o*, *l*, *m*, *n*,*s* ipſis fractionibus proportionales; ac proinde etiam ipſi *o*, *l*, *m*,*n*,*s* continuè proportionales erunt. Igitur inter extremos *o* & *s* cadunt medii proportionales integri *l*, *m*,*n*. Sed quia per conſtructionem X & Z æquãtur fractis *op*,& *ſp*,erit X ad Z ut fractus *op* eſt

$$X\ \frac{a}{b}.\frac{c}{d}.\frac{e}{f}\ Z$$

$$\frac{o}{p}.\frac{l}{p}.\frac{m}{p}.\frac{n}{p}.\frac{s}{p}$$

ad

ad fractum *ſp*, hoc eſt,ut *o* ad *s*. Quare cum inter *o* & *s* cadant integri proportionales medii *l*, *m*, *n*, etiam inter X & Z,cadent per 8. 8,totidem medii proportionales integri : quod fieri non poſſe jam oſtenſum eſt in prima parte.

Eodem diſcurſu per 8. 8. demonſtrabitur proportionales nullos reperiri medios inter numeros quoſcunque jam dictis proportionales.

PROBLEMA I.

Inter duos datos numeros unum medium proportionalem invenire.

Dati numeri ſe invicem multiplicent. Producti radix quadrata eſt medius quæſitus. Quod ſi productus non ſit quadratus, Problema eſt impoſſibile, ut patet ex theor. 1.

PROBLEMA II.

Inter duos datos numeros, quotcunque medios proportionales exhibere.

Dati ſint numeri A, B. Major B dividatur per minorem A & quotiens ſit

	A	B		
i	c	d	e	f.
1.R4)c.	R4)d.	R4)e.	R4)f.	
A.R4)m.	R4)n.	R4)p.	R4) s.	

c. Inſtituatur progreſſio geometrica incipiens ab 1, & *c* per terminos uno plures (unitate non computatâ) numero mediorum quæſitorum : ut ſi cupis duos medios, progreſſio continuetur per terminos tres ; ſi tres medios, per quatuor & ſic

 dein-

deinceps. In ex-		A	B		
emplo appoſito	i	c	d	e	f
progreſſio con-	1.	R4)c.	R4) d.	R4) e.	R4)f.
ſtat præter uni-		A.	R4)m.	R4)n.	R4) p. R4)s.
tatem quatuor					

terminis *c, d, e, f*, quia petuntur tres medii.

Ex hiſce terminis extrahatur radix cubica ſi petantur medii duo; radix biquadrata, ſi tres; & ſic deinceps. In exemplo noſtro, qui petuntur medii tres, *i, c, d, e f* extrahuntur radices biquadratæ, quæ ſic exprimuntur. 1, R4) c, R4) d, R4) e, R4) f. Ducantur deinde hæ radices in A minorem datum, ut fiant A, R4) m, R4) n, R4) p, R4) s.

Dico inter duos datos tres medios eſſe R4) m, R4) n, R4) p, ſi quidem numeri *m, n, p* ſint biquadrati: ſin verò; problema eſſe impoſſibile.

Demonſtr. Quoniam 1, *c, d, e, f* ſunt per conſtr. continuè proportionales, etiam radices eorum ſimiles, 1, R4) c, R4) d, R4) e, R4) f continuè proportionales erunt. Atqui A has multiplicans produxit, A, R4) m. R4) n, R4) p, R4) s. Ergo per 17. 7, etiam hi producti erunt continuè proportionales; ac proinde inter A & R4) s inventi ſunt tres proportionales medii. R4) m, R4) n, R4) p. Quare ſi oſtenderimus R4) s æquari B. liquebit propoſitum.

Quia per conſtr. unitas, *c, d, e, f* ſunt continuè proportionales, erit per 8. 9. quartus *f*, biquadratus radicis *c*. Ergo *c* eſt R4) f. Jam quia A dividens B fecit quotientem *c*, ergo A ductus in *c* producit B. Quare cum *c* ſit R4) f, etiam A ductus in R4) f, producet B. Sed A ductus in R4) f produxit R4) s. Ergo R4) s eſt B. Inter A igitur & B medii ſunt inventi tres R4) m, R4) n, R4) p.

Quod

Quod ſi numeri *m n p* non ſint biquadrati eorum biquadratæ radices R4) m, R4) n, R4) p, nullis poterunt numeris integris fractiſve explicari, ut demonſtratum eſt l. 3. c. 7; ac proinde impoſſibile erit quæſitum problematis.

CAPUT VIII.

De Combinationibus & Permutationibus.

HOc capite quod ad progreſſiones quaſi quædam appendix eſt, Arithmeticam hactenus explicatam ac demonſtratam concludo.

Quamvis voces illæ combinatio & permutatio promiſcuè poſſint accipi, viſum eſt hic tamen eas diſtinguere hunc in modum: Datus ſit certus rerum numerus, exempli gr. 10 litteræ: Si quæratur quot ex his 10 litteris haberi poſſint diverſi binarii litterarum, & quot diverſi ternarii & ſic deinceps, dicentur quæri omnes combinationes diverſæ litterarum 10, quarum ſingulæ & ſemper minori conſtant rerum numero, quam is qui datus eſt, & nulla rem eandem bis continet: & nulla habet omnes res eaſdem cum ullâ alterâ. Quod ſi quæratur, quoties 10 illæ datæ litteræ miſceri inter ſe poſſint ſic ut ſemper accipiantur omnes ſolo ordine mutato dicentur quæri permutationes omnes 10 litterarum.

PROBLEMA I.

E*X dato numero rerum combinationes omnes reperire.*

Dentur exempli gr. 8 litteræ *a, b, c, d, e, f, g, h.* Prima *a* combinetur cum ſingulis ipſam ſequentibus, nimirum cum *b, c,d,e, f, g, h,* & provenient inde combinationes binarum diverſæ. 7, nempe, *ab,ac,ad,ae, af, ag,ah,* ſecunda *b* combinetur cum ſingulis ipſam ſequentibus, nempe cum *c,d,e,f,g,h,* & ſic deinceps ſingulæ datarum cum omnibus ipſas ſequentibus combinentur: provenient diverſi binarii omnes, qui ex dato litterarum numero haberi poſſunt.

Quod ſi ſingulos binarios diverſos jam repertos combines cum ſingulis litteris ipſos conſequentibus, prodibunt omnes diverſi terniones, qui haberi poſſunt ex dato numero litterarum. Exempli gr. binariorum inventorum primus *ab* combinetur cum ſingulis litteris ipſum ſequentibus, quæ ſunt *c, d, e, f, g, h,* provenient terniones *abc,abd,abe,abf,abg,abh.* ſumatur jam alius quivis binarius *cf*: litteræ hunc ſequentes, ſunt *g, h,* hic ergo dat terniones *cfg, cfh,* non plures.

Combinationes 8 *Litterarum*

a b c d e f g h

Binarii diverſi 28	Quaterniones diverſi 70
ab,ac,ad,ae,af,ag,ah,	abcd,abce,abcf,abcg,abch
bc,bd,be,bf,bg,bh,	abde,abdf,abdg,abdh.
cd,ce,cf,cg,ch,	abef,abeg,abeh.
de,df,dg,dh,	abfg,abfh.
ef,eg,eh.	abgh.
fg,fh,	acde,acdf,acdg,acdh,
gh.	acef,aceg,aceh.
	acfg,acfh.
	acgh.

Ter-

Terniones diverſi 56.

abc,abd,abe,abf,abg,abh
acd,ace,acf,acg,ach.
ade,adf,adg,adh.
aef,aeg,aeh.
afg,afh.
agh.
bcd,bce,bcf,bcg,bch
bde,bdf,bdg,bdh.
bef,beg,beh.
bfg,bfh.
bgh.
cde,cdf,cdg,cdh.
cef,ceg,ceh,
cfg,cfh.
cgh.
def,deg,deh.
dfg,dfh.
dgh.
efg,efh.
egh.
fgh.

adef,adeg adeh.
adfg,adfh
adgh.
aefg,aefh
aegh.
afgh.
bcde,bcdf,bcdg,bcdh.
bcef,bceg,bceh.
bcfg,bcgh.
bcgh.
bdef,bdeg,bdeh.
bdfg,bdfh.
bdgh.
befg,befh.
begh.
bfgh.
cdef,cdeg,cdeh.
cdfg,cdfh.
cdgh.
cefg,cefh.
cegh
cfgh
defg,defh.
degh
dfgh
efgh

Rurſum ſi omnes jam inventi terniones combinentur cum litteris ipſos ſequentibus, prodibunt omnes quaterniones diverſi poſſibiles. Et ſic deinceps.

Ratio hujus conſtructionis per ſe ſatis eſt ma-

manifeſta. Ad pleniorem porrò intelligentiam totius methodi.

Obſerva 1. Si ex dato rerum numero capiantur duo numeri, qui ſimul componunt ipſum datum numerum, eorum combinationes ſunt æquè multæ. Dentur 8 litteræ, & ex numero 8, ſume 1, & 7, quæ ſimul efficiunt 8, poterunt ex 8 ſumi octo diverſæ unitates ac proinde etiam 8 diverſi litterarum ſeptenarii.

Rurſum ex 8 cape 2 & 6, quæ juncta efficiunt 8. Methodo jam traditâ ex 8 litteris habentur combinationes binarum diverſæ 28: totidem ergo erunt etiam diverſæ combinationes ſenariæ. ſumantur ex 8 rurſum 3 & 5, quorum ſumma eſt 8; quoniam combinationes ternariæ diverſæ repeřiuntur 56, etiam totidem erunt diverſæ combinationes quinariæ. Quæ omnia ſunt manifeſta conſideranti.

Obſerva 2. Quo numeri ſecundùm quos fit combinatio utrimque magis accedunt verſus medium, eò plures exhibent combinationes. Sic ex datis litteris 8, plures habentur biniones & ſenarii diverſi, quam unitates & ſeptenarii, item plures diverſi terniones & quinarii, quam biniones, & ſenarii.

Obſerva 3. Cum numerus rerum datus eſt par, tunc illius ſemiſſis maximum dabit numerum combinationum, ut cum litterarum numerus datur 8, ſi litteræ combinentur quaternæ, habebitur maximus combinationum numerus.

Cùm verò numerus rerum datur impar, tunc duo numeri contigui, quorum ſumma facit datum numerum rerum, exhibent maximum nu-

me-

merum combinationum. Ut ſi dentur 9 litteræ, numeri contigui, quorum ſumma faciat 9, ſunt 4 & 5. Quare ſi litteræ combinentur quaternæ, vel quinæ, maximus habebitur numerus combinationum.

Quoniam verò ex methodo jam traditâ ſciri nequit combinationum numerus niſi ſingulæ exhibeantur, regulam adjungo ex Petro Herigono, quâ facile is innoteſcat.

Reg. Datus ſit rerum numerus *a*, & alius eo minor *b*, ſecundùm quem res datæ ſint combinandæ. Inſtituantur duæ progreſſiones arithmeticæ per ſubductionem unitatis à numeris datis *a*,*b*, tot terminorum, quot minor *b* habet unitates. Tum numerus *c* genitus ex multiplicatione terminorum majoris progreſſionis, dividatur per numerum *e* productum ex multiplicatione terminorum progreſſionis minoris. Quotiens erit quæſita combinationum multitudo, quæ haberi poteſt, ſi res datæ ſecundum numerum *b* combinentur.

a	c	
8.7.6	336	(56 f
3.2.1	6	
b	e	

Quod ſi lubeat ſcire in quot combinationibus res ſingulæ reperiantur, multitudinem combinationum duc in numerum, ſecuudùm quem res ſunt combinatæ; productum divide per datum numerum rerum, quotiens oſtendet in quot combinationibus unaquæque res reperiatur.

Appoſui exemplum horum omnium in litteris 8 *a*, *b*,*c*, *d*,*e*, *f*, *g*,*h*. Ex his diverſi habentur binarii 28, terniones 56, quaterniones 70, quinarii 56, ſenarii 28, ſeptenarii, 8, qui reſpondent totidem di-

diverſis unitatibus, ut ſenarii binariis, & quinarii ternionibus. Soli porrò binarii, terniones & quaterniones hic ſunt expreſſi; cæteri eâdem arte reperiuntur. Itaque litteræ octo *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h* admittunt combinationes 246: permutationes dabit caput ſequens.

PROBLEMA II.

D*Ato numero, omnes permutationes poſſibiles invenire.*

Dentur exempli gr. litteræ 10 *a*.*b*,*c*,*d*,*e*,*f*.*g*,*h*,*i*,*k*. Oporteat omnes poſſibiles 10 litterarum ordines diverſos exhibere.

Methodus ejuſque demonſtratio traditæ ſunt in ſcholio prop. 19 l. 8 quem locum conſule. Inde ſequens permutationum tabella confecta eſt.

Num. rerum.	Permut.
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40,320
9	362,880
10	3(628,800
24	620,448(401,733(239;439(360,000.

Quod ſi in dato numero rerum aliquæ ſimiles ſint ſeu eædem, ut ſi detur hæc vox *Ignatius*, 8. li-

8 litteris conſtans, in qua duæ litteræ occurrunt eædem nempe, *i*, permutationum numerus invenietur hâc regulâ ex *a* Kirchero noſtro depromptâ. a *Tom.* 2. *muſurg. pag.* 5.

Numerus permutationum totius dividatur per numerum permutationum, quas ſubire poſſunt res ſimiles, quotiens dabit quæſitum.

Litteræ 8 hujus vocis *Ignatius*, ſi omnes eſſent diverſæ admitterent permutationes 40, 320. litteræ eædem ſunt 2. Porrò 2 permutationes admittunt duas. Igitur 40, 320 dividantur per 2. Quotiens 20, 160 dabit omnes ordines diverſos poſſibiles 8 litterarum, quibus conſtat vox. *Ignatius*.

Corollaria.

1. HOmines 10. poſſunt menſæ accumbere plus quam termillioneſies, ſic ut nunquam ſit idem ordo accumbentium. Rerum quippe 10, ordines diverſi ſunt 3 (628, 800.

2. Mille milliones ſcriptorum, mille annorum millionibus non ſcribent omnes 24 litterarum alphabeti permutationes, licet ſinguli quotidie abſolverent 40 paginas, quarum unaquæque contineret 40 diverſos ordines litterarum 24.

Id breviter ſic oſtendo. Quoniam unus ſcriptor uno die ſcribit 40 paginas, quarum ſingulæ contineant 40 ordines diverſos litterarum 24; ductis igitur 40 in 40, fiunt diverſi ordines 1600, quos uno die ſcribet ſcriptor unus. Ergo ſi demus anno dies 366 (hoc eſt plures, quàm ei debeantur) ſcribet ſcriptor unus anno uno 24 litterarum ordines ſive permutationes 585, 600: fit enim hic numerus ex 1600 ductis in 366.

Annis

Annis igitur 1,000(000000 (hoc eſt mille millionibus annorum) ſcribet unus permutationes

A 585 (6000000)000000
B. 585, 600(000000(000000(000000
C. 620, 448(401,733(239,439(360,000

diverſas A: hic enim numerus oritur ex 585, 600 ductis in 1, 000 (000000. Quare ſi mille annorum millionibus Scriptor unus ſcribat permutationes ſeu ordines diverſos A; ſcriptorum mille milliones eodem tempore, videlicet mille annorum millionibus, ſcribent litterarum 24 tot permutationes diverſas, quot fiunt ex 1,000(000000 hoc eſt, mille millionibus, ductis in A. Numerus verò permutationum ex hac multiplicatione genitus, eſt B, qui adhuc minor eſt numero C deſignante permutationes omnes 24 litterarum.

3. Ex problemate eodem reperientur omnia anagrammata poſſibilia nominis dati. Quod ſi aliquæ litteræ in nomine dato ſint eædem, adhibenda inſuper erit regula ſuperius tradita.

4 Ut habeantur omnia vocabula, quæ ex litteris alphabeti 24 concinnari poſſunt, oportebit per probl. 1. omnes 24 litterarum combinationes binarias, ternarias, quaternarias, quinarias, ſenarias, &c. exhibere; & primum quidem combinationes omnes ſtrictè acceptas, de quibus agitur in 1. probl. quæ non ſolùm omnes inter ſe diverſæ ſunt, ſed etiam nullam litteram bis continent; deinde verò etiam eas omnes in quibus litteræ una vel plures ſæpius recurrunt, quarum inventio ex prioribus ſatis eſt manifeſta. Tum verò combinationum ſingularum litteræ per probl. 2,

di-

diverſimodè inſuper erunt permutandæ toties, quoties poſſunt. Ex omnibus iſtis tum combinationibus, tum permutationibus numerus vocabulorum ingens quidem ille & propè immenſus; ſed tamen certus atque determinatus procreabitur.

F I N I S.

Ad majorem Dei gloriam.

SYLLABUS LIBRORUM AC CAPITUM.

LIBER PRIMUS.

Logiſtica integrorum numerorum.

Caput 1. *Notarum arithmeticarum inſtitutio.*
Cap. 2. *Numeratio.*
Cap. 3. *Poriſmata quædam ex quibus pendent rationes operationum logiſticarum.*
Cap. 4. *Additio.*
Cap. 5. *Subtractio.*
Cap. 6. *Tabula Pythagorica multiplicationi, diviſionique inſerviens.*
Cap. 7. *Multiplicatio.*
Cap. 8. *Multiplicatio expeditiſſima per laminas tabulæ Pythagoricæ.*
Cap. 9. *Diviſio.*
Cap. 10. *Diviſio facillima per laminas tabulæ Pythagoricæ.*
Cap. 11. *Additionis, ſubtractionis, multiplicationis, diviſionis examina.*

LIBER SECUNDUS.

Logiſtica fractorum numerorum.

Cap. 1. *Fractorum numerorum definitio, ſcriptio, enunciatio.*
Cap. 2. *Fractorum prima theoria.*
Cap. 3. *Reductiones fractorum.*
Cap. 4. *Additio.*
Cap. 5. *Subtractio.*

Cap. 6.

Cap. 6. *Multiplicatio.*
Cap. 7. *Diviſio.*
Cap. 8. *De fractis fractorum.*
Cap. 9. *Fracti decimales.*
Cap. 10. *Requiſita quædam ad demonſtrationem logiſticæ decimalis.*
Cap. 11. *Additio decimalis.*
Cap. 12. *Subtractio decimalis.*
Cap. 13. *Multiplicatio decimalis.*
Cap. 14. *Diviſio decimalis.*
Cap. 15. *Uſus fractorum decimalium.*

LIBER TERTIUS.

De Radicum extractione.

Cap. 1. *Radicis quadratæ extractio.*
Cap. 2. *Radicis quadratæ demonſtratio.*
Cap. 3. *Radicis cubicæ extractio.*
Cap. 4. *Radicis cubicæ demonſtratio.*
Cap. 5. *Cujuſcunque radicis extractio.*
Cap. 6. *Extractio quarumlibet radicum ex fractis etiam decimalibus.*
Cap. 7. *Approximatio radicum.*
Cap. 8. *De Tabulis quadratorum & cuborum.*
Cap. 9. *Uſus laminarum tabulæ Pythagoricæ in extractione radicum.*

LIBER QUARTUS.

De Regulis.

Cap. 1. *Regula ſimplex proportionum directa & everſa.*

Cap. 2. *Regula proportionum compoſita, tam directa quàm everſa.*
Cap. 3. *Regula Societatum.*
Cap. 4. *Regula alligationis.*
Cap. 5. *Regula falſi ſimplex.*
Cap. 6. *Regula falſi duplex.*

LIBER QUINTUS.

De Progreſſionibus.

De Progreſſione Arithmetica.

Cap. 1. *Progreſſionis Arithmeticæ affectiones.*
Cap. 2. *Progreſſionis Arithmeticæ problemata.*
Cap. 3. *Quæſtiones circa Progreſſiones Arithmeticas.*

De Progreſſione Geometrica, tum finita, tum infinita.

Cap. 4. *Progreſſionis Geometricæ finitæ, & infinitæ affectiones.*
Cap. 5. *Progreſſionis Geometricæ finitæ ac infinitæ problemata.*
Cap. 6. *Quæſtiones circa Progreſſiones Geometricas.*
Cap. 7. *De mediis quotcumque proportionalibus numeris inter duos datos.*
Cap. 8. *De permutationibus & combinationibus.*

SUM-

SUMMA PRIVILEGII.

PHILIPPVS Dei gratia, Hiſpaniarum, Indiarum, &c. Rex Catholicus, Archidux Auſtriæ, Dux Burgundiæ, Brabantiæ, &c. Sereniſſimus Belgarum Princeps diplomate ſuo ſanxit, ne quis librum, cui titulus eſt R. P. ANDREÆ TACQVET *Arithmeticæ Theoria & Praxis*, citra JACOBI MEVRSII voluntatem, ullo modo imprimat, aut alibi terrarum impreſſum, in Inferioris Germaniæ ditiones importet, venalémve habeat. Qui ſecùs faxit, confiſcatione Librorum, & aliâ gravi pœnâ mulctabitur, uti latiùs patet in Litteris datis Bruxellæ XXIX. Octob. M, DC. LXIV.

Signat

LOYENS.

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06359 1443

Digitized by Google